Eine kleine Kulturgeschichte des Rechnens und des Rechenunterrichts

Wollten Sie schon immer mal wissen.....

- *..... woher unsere Zahlen kommen?*
- *..... wie die Römer mit ihren Buchstabenzahlen gerechnet haben?*
- *..... warum man Rechenaufgaben (Addition und Subtraktion) manchmal neben- und manchmal untereinander schreibt und das eine als „schriftlich“, das andere als „halbschriftlich“ bezeichnet?*
- *..... warum das „halbschriftliche Rechnen“ in den ersten Schuljahren gelehrt wird, obwohl es schwieriger ist als das „schriftliche Rechnen“?*
- *..... woher die Idee des Zählrahmens bzw. des Hundertergitters stammt, die als Hilfs- bzw. Anschauungsmittel bis heute weit verbreitet sind?*

..... dann lesen Sie die folgenden Ausführungen, die noch eine Reihe weiterer Informationen bereithalten!

1. Ursprünge der Zahlen

„Eins, zwei, viele“: Diese Urbegriffe des Zählens bilden die Frühstufe des kindlichen Denkens. Sie stehen aber auch am Beginn des Zählens und Rechnens der Menschheitsgeschichte.[1]

Das menschliche Auge kann simultan, also ohne zu zählen, bis zu 4 Objekte als „Menge 4“ erkennen. Wenn es mehr Objekte sind, müssen diese in einer bestimmten Art strukturiert sein (wie z..B. die 4 senkrechten Striche, die durch einen Schrägstrich zur Menge 5 gebündelt werden, die Finger- oder Würfelmengen usw.) oder man muss abzählen.

„*Abzählen*" heisst: Jedem Objekt wird ein Name, ein Zahlwort zugeordnet.
Schon sehr früh erfand man auch die Möglichkeit zur visuellen Darstellung von Mengen bzw. Zahlwörtern. Eine sehr einfache, seit Jahrtausenden benutzte Methode ist die *gestische* Darstellung mit den Händen bzw. Fingern, die auch in der kindlichen Entwicklung die ursprünglichste Form ist.
Für die Entwicklung der Zahl ist die Hand sowohl in der Kulturgeschichte wie in der kindlichen Entwicklungsgeschichte sehr bedeutsam: Eine ***Hand*** oder beide Hände zusammen stellen eine ***Gesamtheit*** dar, die ***Finger*** sind eine natürliche ***Abfolge*** von Elementen (erster Finger, zweiter Finger usw.). Die Hände veranschaulichen damit sowohl das Prinzip der Kardinalzahlen (die Anzahl der Gegenstände einer *Menge*) wie auch das der Ordinalzahlen (die stets gleich bleibende Reihe der Zahlen*folge*).
Um Mengen *dauerhaft* festzuhalten, wurden in allen Hochkulturen der frühen Menschheitsgeschichte Symbole und Symbolsysteme zur Darstellung von Mengen entwickelt. Einfache Repräsentationen findet man als Einkerbungen beispielsweise auf Knochen, Tontafeln oder Holz [Kerbholz!]. Solche konkreten Mengendarstellungen wurden zunehmend abgelöst durch grafische Zahlzeichen, die zunächst noch figürlich-bildhafte Formen erkennen lassen oder auch bereits abstrakte Formen aufweisen können.[2]
Bereits um 3000 v.Chr. hatte sich in Ägypten eine Zahlenschreibweise herausgebildet, die bildhafte Zeichen auf dezimaler Grundlage benutzte. Und in Griechenland verwendete man um 500 v.Chr. ein Ziffernsystem mit einer sich abwechselnden Fünfer- und Zehnerbündelung. Auch die römischen Zahlensymbole lassen teilweise den Zusammenhang mit den Händen bzw. Fingern noch deutlich erkennen.

> *„Sicherlich geht der fast universale Gebrauch der Zehn als Basis auf den ‚Zufall der Natur', die Anatomie unserer beiden Hände zurück, denn der Mensch hat nun mal das Zählen anhand seiner zehn Finger gelernt." (Ifrah)*

Anders gesagt: Die Hände sind das älteste und ursprünglichste Rechengerät, das der Mensch stets zur Hand hat.

---

[1] Quelle: Arithmeum / Bonn

[2] Eines der ältesten abstrakten Symbolsysteme entwickelte sich um ca. 2000 v.Ch.: Die babylonische Keilschrift mit der Basiszahl 60, deren Überreste sich in unserer Einteilung der Stunde in 60 Minuten und der Minute in 60 Sekunden erhalten hat.

2. Römische Buchstabenschrift und Rechnen

Die römische Zahlschrift ist bis heute bekannt und gelegentlich auch noch in Gebrauch (z. B. auf Uhren oder als Gliederungszahlen). Es handelt sich um Buchstabenzahlen, bei denen die Reihung mit Rangschwellen in Form von Buchstaben erfolgt:

I = 1 bis 4 / **V** = 5 / **X** = 10 bis 40 / **L** = 50 / **C** = 100 bis 400 / **D** = 500 / **M** = 1000 bis 10'000

(Varianten wie IV statt IIII, IX statt VIIII, XL statt XXXX usw. tauchten erst später auf).

Mit dieser Zahlschrift wurde jedoch nicht gerechnet. Sie diente ausschliesslich dazu, das Ergebnis einer Berechnung aufzuschreiben.
Gerechnet wurde auf einem Brett oder einem Tisch, dem so genannten **Abakus** [lat. *abacus* von griech. *abax* = runde Platte] bzw. **Rechenbrett oder Rechentafel**.

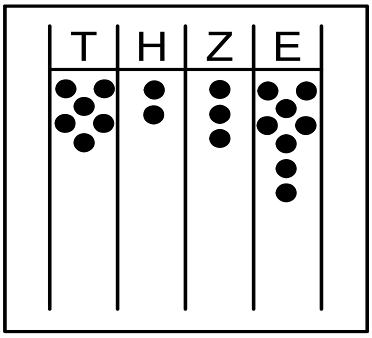

Abb.1: **Eine Römische Stellentafel** [1]

Aufgeschrieben wurde dieses Ergebnis so: **MMMMMMCCXXXVIII**. Wie man sieht, ist die römische Zahl im Vergleich mit der heute üblichen Schreibweise (6238) wesentlich länger, dadurch schwieriger zu überblicken und damit nicht zuletzt auch eine Fehlerquelle beim Notieren und Abschreiben.

Gerechnet wurde ursprünglich vorwiegend mit losen Steinchen[2], die man auf das Brett legte, hinzufügte oder wegnahm. Ergaben sich pro Spalte mehr als 10 Steine, so ersetzte man diese durch 1 Stein in der links folgenden Spalte. Mit dieser Art von Bündelung operierten die Menschen bereits auf einer recht hohen Abstraktionsstufe, indem man einem

[1] Menninger S. 103. Andere Abbildungen zeigen Stellentafeln, bei denen alle 10 Steine untereinander gelegt sind.
[2] z.B. mit Kieselsteinen, lat. calx → calculi = Rechensteine → franz. calculer → kalkulieren

Stein ***allein durch seine Stellung*** Bündelwert gab. Eine leere Spalte zeigte an, dass hier keine Werte vorkommen.

Für den täglichen Gebrauch stand den Händlern ein **Handabakus (**Abb. 2**)** mit Fünfer-Bündelung oberhalb des Stellenstegs zur Verfügung. Bei der Einstellung einer Zahl wurden die Knöpfchen von oben bzw. von unten zum Steg hingeschoben. Weil unterhalb des Stegs jeweils nur 4 Knöpfchen sind, konnte eine Stelle nicht konkret auf 10 aufgefüllt werden, sondern musste im Kopf gebündelt bzw. ‚bereinigt' werden. Dieses Rechengerät stellte also wesentlich höhere Anforderungen an die Abstraktionsfähigkeit der Benutzer.

In der Abbildung 2 ist die Zahl 5328 dargestellt.

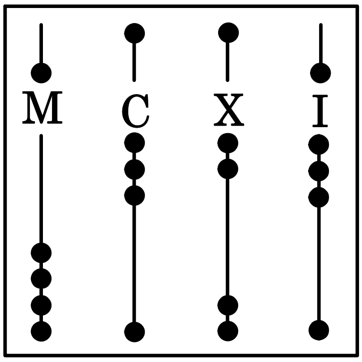

Abb. 2: **Römischer Handabakus**[1]

Halten wir fest:
Beim Rechnen mit dem Abakus wandten die Römer bereits das **dekadische Stellenwertsystem** an, bei dem sich die Grundarten des Rechnens – Zuzählen und Abziehen – auf die beiden ursprünglichen Zählgesetze der Menschheit vereinfachen: ***Reihung*** und ***Bündelung***.

Die Richtung des Bündelns wurde *von rechts nach links* vorgenommen. Es ist nahe liegend, dass diese Bündelungsrichtung beim Zählen und Rechnen mit losen Steinchen *für Rechtshänder* aus praktischen Gründen zweckmässig ist.

Zahlschrift und ***Rechnen*** liefen im römischen Weltreich während Jahrhunderten nebeneinander her, ohne dass diese Diskrepanz als störend empfunden wurde. Das ist erstaun-

[1] Menninger, S.113

lich und man kann sich mit Recht fragen, warum es nicht zu einer raschen Angleichung beider Vorgehensweisen kam. Eine mögliche Erklärung fand ich in folgendem Zitat:

> *„Ihre volkstümliche Einfachheit erkaufen die römischen Ziffern mit rechnerischer Untauglichkeit, aber diese wird durch das Rechenbrett mit seinem höheren Ordnungsgesetz wieder völlig ausgeglichen! Diese gegenseitige Ergänzung von Zahlschrift und Brettrechnen schafft ein für das einfache Rechnen vollkommen ausreichendes und leicht zu handhabendes Werkzeug. Deshalb gibt es das Volk auch nur schwer aus der Hand."* (Menninger)

Wie wir sehen werden, sollte es noch Jahrhunderte dauern bis das den Römern bereits bekannte *Stellenwertsystem* auch *als Zahlschrift* entdeckt wurde, und es verging nochmals eine lange Zeit, bis es sich auch als *schriftliches Rechensystem* allgemein durchsetzen konnte.

3. Die indisch-arabischen Zahlen

Dieses Zahlensystem ist uns allen vertraut und wird weltweit benutzt: Das dezimale **Stellenwert-** bzw. **Positionssystem**. Bei diesem Prinzip sind den Ziffern je nach ihrer Stellung innerhalb der Zahldarstellung variable Mengengrössen zuordnet.
Mit diesem Zahlensystem ist die Gesetzmässigkeit des römischen Rechenbretts nun auch in der Stellenordnung der Zahlschrift präsent! Oder anders gesagt: Das praktische Rechnen mit der römischen Stellentafel und die indisch-arabische Zahlschrift stimmen nun überein.
Für die gewiss nicht völlig abwegige Vermutung, die Idee der Römischen Stellentafel könnte die Erfindung der indischen Stellenschrift zumindest indirekt beeinflusst haben, fand ich in der Literatur jedoch keinen Hinweis.

Mit der Zahlschrift gemäss Positionssystem wurde es erstmals möglich, Rechenoperationen einfach und schnell durchzuführen, was für die weitere Entwicklung von entscheidender Bedeutung war:

> *„Die Weiterentwicklung nicht nur der Mathematik, sondern auch des Rechnens im Alltagsleben wäre ohne die Übernahme dieser revolutionären Neuerung nicht möglich gewesen."* (Bossung)

Diese heute allgemeinen als *„arabisch"* bezeichnete Zahlschrift stammt in Wahrheit **aus Indien**.

Die geniale Erfindung der Ziffer **Null** als Platzhalter für leere Stellen verdanken wir ebenfalls indischen Mathematikern. Es wird berichtet, dass ursprünglich – wie auf dem römischen Rechenbrett – auch im Ziffernsystem die Stelle einfach leer gelassen wurde. Das aber erwies sich als untauglich, weil sich beim Notieren und Abschreiben mehrstelliger Zahlen allzu leicht und oft Ungenauigkeiten und Irrtümer einschlichen.
Das Wort *Ziffer* geht übrigens zurück auf das arabische Wort sifara, das „*leer sein*" bedeutet. Als die arabischen Mathematiker im 9. Jahrhundert auf das neue indische Zahlensystem umstellten, übernahmen sie auch das indische Zahlzeichen für die Leerstelle und bezeichneten es als *sifre* (oder *cifra*). *Ziffer* bedeutete also ursprünglich das Zahlzeichen „**0**" für das (spätere) Zahlwort „*Null*". Dieses Zahlwort wiederum wurde erst Jahrhunderte später (im 16. Jh.) von lat. *nullus*, d.h. „*keiner*" entlehnt. Das Wort „Ziffer" erhielt sich als allgemeine Bedeutung für „Zahlzeichen".

Die uns heute geläufige Zahlschrift als Stellenwertsystem kann in Indien in die Zeit zwischen dem 6. und 8. Jahrhundert n.Chr. zurückverfolgt werden. Durch die Araber gelangte das indische Zahlensystem über Nordafrika nach Spanien, wo es um die Zeit der ersten Jahrtausendwende erstmals in einem Manuskript erwähnt wurde. Bekannt wurde es durch einen persisch-arabischen Gelehrten mit dem Beinamen al-Charismi, der zwei Abhandlungen über das von den Arabern übernommene indische Zahlensystem verfasste.
Eines der Bücher mit dem Titel „*Abriss der mathematischen Operationen durch Einrenken und Gegenüberstellen*" beschäftigte sich mit der Lehre von den **Gleichungen**. Weil im arabischen Titel unter anderem das Wort „*al-gabr*" vorkam, wurden diese mathematischen Operationen im Laufe der Zeit als **Algebra** bezeichnet. Solche mathematischen Gleichungsoperationen waren zwar bereits seit dem 3. Jahrhundert unserer Zeitrechnung in Griechenland bekannt. Neu aber war, dass der Autor sie nun in praxisnahen Rechenoperationen innerhalb des erst kurz zuvor übernommenen indischen Zahlensystems anwandte.

Das andere Buch führte in den Gebrauch des indischen Positionssystems und die damit verbundenen Rechenregeln bei den ***Grundrechnungsarten*** ein. Aufgrund einer Verstümmelung des Autorennamens wurde das mit dem neuartigen Zahlensystem einhergehende vereinfachte Rechenverfahren gemäss Stellenwertprinzip als **Algorithmus (**oder auch Algorismus) bezeichnet. Für das neue Verfahren sprach, dass es das Rechnen erheblich erleichterte: Die Menschen waren für Berechnungen nun nicht mehr auf das konkrete Handeln mit dem Abakus angewiesen, sondern sie konnten diese **„mit der Feder**", also

„schriftlich“, durchführen. Noch heute wird deshalb das algorithmische Rechenverfahren als **„schriftliches Rechnen“** bezeichnet.
Mitte des 12. Jahrhunderts übersetzten spanische Gelehrte das Werk von al-Charismi ins Lateinische. Danach verbreitete sich das neue Zahlensystem allmählich in den mittelalterlichen Klosterschulen.
Es dauerte aber noch Jahrhunderte, ehe es sich auf breiter Front durchsetzen konnte.

4. Das mittelalterliche Rechenbrett (der Kloster-Abakus)

Vermutlich etwa zur gleichen Zeit, als sich die Mönche mit der neuen Zahlschrift zu beschäftigen begannen, hielt in den mittelalterlichen Klosterschulen eine andere Neuerung Einzug: Der **Linien-Abakus**.

Das römische Rechenbrett mit den senkrechten Spalten wurde durch eine Vierteldrehung zu einem **Rechenbrett mit waagerechten Linien**.

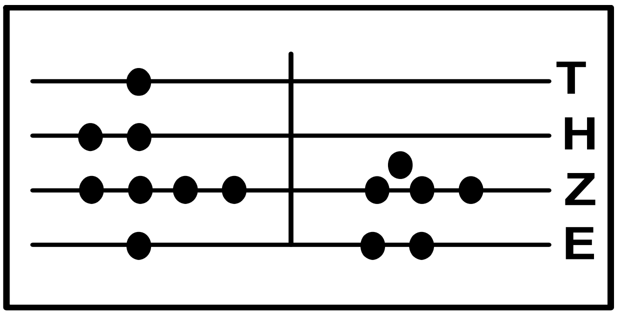

Abb. 3: **Grundform eines Linienbretts**[1]

Auf der linken Seite des zweigeteilten Brettes ist die Menge 1241 dargestellt, wobei die Werte *auf den Linien* liegen. In der rechten Spalte liegt einer der Steine *zwischen* der Hunderter- und der Zehnerstelle. Die Lage in diesem Zwischenraum bedeutet, dass der darunter liegenden Linie die Menge 5 beizufügen ist, so dass sich also auf der rechten Seite die Zahl 82 ergibt.
Der Grund für diese Querwendung scheint nicht bekannt zu sein. Vielleicht war es eine Angleichung an die waagerechten Notenlinien, die vor nicht zu langer Zeit erfunden worden waren. Oder vielleicht gab es – so eine andere Spekulation – bei den Händlern eine vermehrte Nachfrage nach handlichen Geräten, mit denen man auf einer Linie nicht nur zwei Summen sondern auch deren Ergebnis nebeneinander darstellen konnte.

[1] Menninger, S. 163

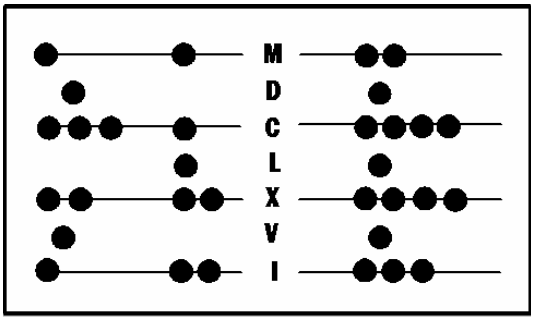

Abb. 4: **Linienbrett mit der Additionsaufgabe:**
1826 und 1172 ergibt 2998 [1]

Wie auch immer es gewesen sein mag: Es ist eine Tatsache, dass ausgerechnet zu einer Zeit, als eine perfekte Übereinstimmung zwischen der indischen Zahlschrift und dem Rechnen auf dem römischen Brett in Reichweite war – Zahlensystem und praktisches Rechnen also erstmals endlich eine Einheit hätten bilden können – diese Chance offensichtlich nicht gesehen oder nicht ergriffen wurde.

5. Rechnen „*auf den Linien*“ versus Rechnen „*mit der Feder*“

Stattdessen kam es zu einer lange dauernden Konkurrenz zwischen den ***Abakisten***, den Anhängern des traditionellen Rechnens ***auf den Linien*** (d.h. mit dem Klosterabakus und den römischen Zahlen) und den ***Algoristen***, die das neue System bevorzugten und ***mit der Feder***, also schriftlich mit dem Stellensystem und den neuen Zahlen rechneten.
Bei Mathematikern und Astronomen setzte sich das schriftliche Rechnen zwar relativ schnell durch.
Im Alltag des Volkes aber blieb das Rechenbrett vor allem beim Rechnen mit Geld noch lange in Gebrauch, da die Neuartigkeit zum Teil argwöhnisch betrachtet wurde. Der Umstand, dass die fremdartigen arabischen Zahlzeichen lange Zeit in unterschiedlichsten Formen geschrieben wurden, war nicht gerade geeignet, das Vertrauen bei Händlern und Kaufleuten zu fördern. Bevor gegen Anfang 1600 n.Chr. die Schreibweise zur heutigen Form vereinheitlicht war, wurden beide Schriftsysteme auch manchmal kombiniert (z. B. MCCCC811 für 1482). Und wer dem schriftlichen Rechnen zwar zuneigte, ihm aber noch nicht so ganz traute, sicherte sich durch das Nachrechnen mit dem Abakus ab.

Entscheidend begünstigt wurde der allmähliche Systemwechsel durch die Erfindung der Buchdruckerkunst. Dazu trug auch bei, dass der damals aufblühende Handel und die vielfältigen wirtschaftlichen Beziehungen immer mehr Spezialisten benötigten, die des Rechnens kundig waren.

Einer der berühmtesten Rechenmeister war **Adam Ries(e)** (1492 – 1559). Dies nicht, weil er besser als seine Kollegen rechnen konnte, sondern weil er drei bedeutende Lehrbücher in deutscher Sprache verfasste. Im ersten Buch behandelte er das Rechnen auf dem mittelalterlichen Abakus, also das *„Rechnen auf den Linien*“. Im zweiten Buch wurde das Rechnen mit den indisch-arabischen Zahlen, *das „Rechnen mit der Feder*“, gelehrt; mit 108 Auflagen zwischen 1522 und 1656 wurde es sein grösster Erfolg. Im dritten Rechenbuch – es war das umfangreichste und erhielt zahlreiche praktische Beispiele – lehrte er beide Rechenarten: Einerseits das schriftliche Rechnen mit der Feder und andererseits das Linienrechnen mit dem Abakus als didaktisches Hilfsmittel zur Einführung in das schrifticher Rechnen mit Ziffern**.** So wurde der berühmte Rechenmeister zum sprichwörtlichen Gewährsmann für die Richtigkeit einer Rechnung. [2]

6. Wanderung eines Kulturguts

Im Abendland hat sich der römische Abakus gegen den mittelalterlichen Linien-Abakus nicht durchsetzen können. Umso überraschender ist es, dass er sich über die weit verzweigten römischen Handelsbeziehungen bis nach China und Japan in verschiedenen Varianten verbreitete, und so beliebt wurde, dass er dort noch bis in unsere Zeit als Rechengerät dient.

Zwar lässt sich in China bereits um 1000 vor unserer Zeitrechnung ein Rechenbrett mit Kugeln nachweisen. Doch der *Suanpan,* das noch heute gebräuchliche Rechenbrett, entstand erst um etwa 1000 n. Ch. und hat nach Meinung vieler Experten mit grosser Wahrscheinlichkeit römische Vorbilder. Im 16. Jahrhundert wurde das chinesische Brett als *Soroban* in Japan übernommen und erfreut sich dort weiterhin grosser Beliebtheit.

Von Osten wanderte das asiatisches Rechenbrett wieder zurück nach Westen. Das Grundmodell besteht aber nun aus mehreren Querdrähten, auf denen im Prinzip je 10 Ku-

---

[1] Schematische Darstellung aus dem Archäologisch-Historischen Museum Lausanne in der Münzkammer von Schloss Chillon am Genfersee

[2] Leider aber griff er die Idee seines Kollegen Jakob Köbel – auch er damals ein berühmter Rechenmeister – nicht auf, die zweistelligen Zahlen in der Reihenfolge zu sprechen wie man sie schreibt, also unverdreht wie z. B. *„zwanzigeins*“ statt „*einundzwanzig*“; (vgl. Gerritzen)

geln laufen. Um das Zählen und Rechnen zu erleichtern sind die 5. und 6. Kugel andersfarbig markiert. Dieses Rechengerät ist unter dem Namen *russische Stschoty* bekannt.
„Von allen Rechenbrettern ist die Stschoty das volksnaheste. Sie ist leicht selbst herzustellen, denkbar einfach zu bedienen und erfordert bei weitem nicht die Vorschule und Geschicklichkeit wie der Soroban. Freilich ist ihre Leistungsfähigkeit auch wesentlich geringer“ (Menninger)

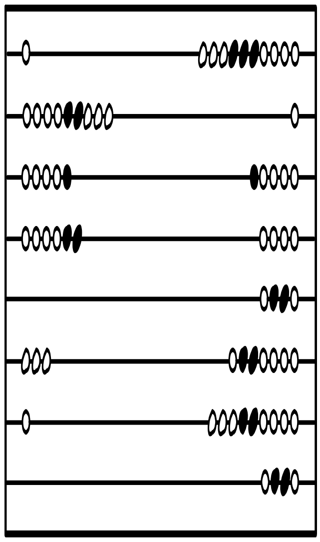

Abb. 5: **Schematische Darstellung[1] und Foto einer russischen Stschoty[2]**

Die Drähte haben Stellenwert und die Kugeln werden von rechts nach links verschoben. Da man in der Regel Geld zusammenzählte, trägt der 4. Draht von unten meist vier Kugeln für die Viertel und dient dann gleichzeitig als Komma, um die beiden Sorten zu trennen. Darüber folgen die Einer, Zehner, Hunderter usw. Auf dem untersten Draht kann man wieder die Brüche ¼, ½ und ¾ verrechnen. Im Schema ist die Zahl **1’956, 31** dargestellt.

Ein französischer Mathematiker, der während des Russlandfeldzugs von Napoleon (1812) als Leutnant im französischen Heer diente, soll von diesem einfach zu bedienenden russischen Rechengerät so begeistert gewesen sein, dass er es nach seiner Rückkehr in allen Schulen seiner Heimatstadt Metz als didaktisches Hilfsmittel einführte. Von hier aus verbreitete es sich rasch in ganz Frankreich aus.

[1] nach Menninger, S. 121/122
[2] Handgerät im Arithmeum in Bonn. Ein grosses Gerät für den Unterricht mit Klassen befindet sich im Schulmuseum in Friedrichshafen.

Und von dort war der Weg nicht mehr weit bis in die deutschen Schulstuben, wo ein etwas vereinfachtes Gerät als „Deutsches Schulrechenbrett" bald unverzichtbar wurde.

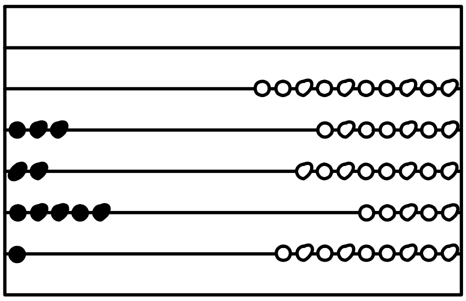

Abb. 6: **Deutsches Schulrechenbrett**[1]

Auf den 6 waagerechten Drähten befinden sich je 10 Kugeln, die von rechts nach links verschoben werden. Die Drähte repräsentieren von unten nach oben zunehmend höhere Stellenwerte. Im Beispiel ist die Zahl **3251** dargestellt.

Als sich gegen Mitte des 18. Jahrhunderts das neue Zahlensystem endgültig durchgesetzt hatte, war es mit der Zeit nicht mehr nötig, den Unterschied des indisch-arabischen Zahlen- und Rechensystems zum mittelalterlich-römischen hervorzuheben. Und weil mittlerweile auch die Bedeutung des Begriffs „Algorithmus" verloren gegangen war, bezeichnete man nun das Rechnen allgemein als „Arithmetik" (abgeleitet von gr. *arithmos* = *Zahl*).

Ab dem 19. Jh. erhielt das **schriftliche Rechnen**, das „Rechnen mit der Feder", schliesslich seine heutige Bedeutung als ein **methodisches Rechenverfahren**, dessen Schritte in einer genau festgelegten Abfolge durchgeführt werden. So gilt für die Grundrechenart der Addition das bekannte Schema: Die Zahlen stehen gemäss ihren Stellenwerten untereinander; begonnen wird stets bei der Einer-Stelle; jede Stelle muss auf 10 Mengeneinheiten ergänzt werden; wenn eine Stelle voll ist, wird die Menge im Verhältnis 10 zu 1 von rechts nach links in die höhere Stelle übertragen.

Dieses algorithmische Rechenverfahren wurde zum Ausgangspunkt für die ersten mechanischen Rechenmaschinen[2].

[1] Schematische Darstellung im „Arithmeum" in Bonn/Deutschland

[2] Von einer Rechen*maschine* spricht man, wenn der Zehnerübergang während des Rechenvorgangs automatisch durchgeführt wird. Mechanismen ohne automatischen Übertrag werden als Rechen*geräte* bezeichnet. Quelle: Arithmeum in Bonn

7. Der Rechenunterricht im 19. Jahrhundert

Beim Anblick des deutschen Schulrechenbretts wird dem Leser/der Leserin wohl der Gedanke durch den Kopf gegangen sein: Das sieht doch ganz ähnlich aus wie unser Zählrahmen, der als Zählgerät vor allem im Vorschulalter immer noch sehr beliebt ist. Gleichzeitig aber stellt man fest, dass es nur eine äusserliche Ähnlichkeit ist, da das heutige Gerät nicht mehr in der ursprünglichen Art des Stellenrechnens gehandhabt wird.
Dieses seit Jahrhunderten bewährte Prinzip, den Drähten nach echter Abakusweise Stellenwerte beizulegen, geriet wohl allmählich in Vergessenheit. Denn auch in den Schulstuben hatte sich bereits Mitte des 18. Jahrhunderts das schriftliche Rechnen gemäss Stellenwertprinzip verbreitet durchgesetzt[1].

Doch die mit diesem Rechenverfahren einhergehende Vereinfachung und Erleichterung beim Erlernen des Rechnens stiess nicht überall auf Zustimmung.
Gegen Ende des 18./Anfang des 19. Jahrhunderts setzte im Zusammenhang mit der Reform des Volksschulunterrichts im Allgemeinen und des Rechenunterrichts im Besondern eine Kehrtwende ein. So beklagte ein Berner Schulmeister im Vorwort zu seinem Rechenbuch aus dem Jahr 1858[2], dass der Rechenunterricht vor 1830 nur als *„reales“* bzw.“ *materielles“* Rechnen gelehrt wurde, was er verächtlich als *„angelernten Regelkram*“ und *„pure Abrichterrei für das spätere Berufsleben“* charakterisierte. Diesem *„angewandten Rechnen“* stellte er als Ideal das *„reine“* bzw. *„innere*“ Rechnen gegenüber, das *„...die geistige Kraft des Kindes im Allgemeinen und an und für sich zu entwickeln, zu beleben und zu stärken versucht.“*

Mit dieser Kritik bzw. mit diesem Anliegen befand er sich in guter Gesellschaft mit dem berühmten Pädagogen Johann Heinrich Pestalozzi (1746-1827). Auf ihn und andere Reformpädagogen geht der formale Bildungsanspruch zurück: Rechnen solle nicht in erster Linie leicht und geschwind zur Anwendung bestimmter Rechenverfahren gelernt werden, sondern ein Mittel zur Förderung der **Denktätigkeit** sein nach dem Motto *„denkend rechnen und rechnend denken lehren“* [3]**.**

---

[1] Im Schulmuseum Mühlebach/Amriswil gibt es ein „Lehrerheft, Berlingen, 1745“, in dem alle Aufgaben untereinander geschrieben sind, unabhängig davon, ob grössere oder kleinere Zahlen addiert bzw. subtrahiert werden.
[2] Jakob Egger; Das Buch befindet sich im Schulmuseum Bern zu Köniz.
[3] Ernst Tillich, *zit.* in Radatz u. Schipper

Als wichtiger Beitrag zur Erreichung dieses formalen Bildungsziels galt den Reformern das **Rechnen im Kopf,** also das Rechnen ohne Hilfsmittel. Die Finger als Hilfsmittel waren zwar zunächst noch erlaubt, später aber lehnte man alle äusseren Hilfsmittel ab.
Stattdessen legten die Reformpädagogen grossen Wert auf die **„Anschauung**“ als Grundlage zur Entwicklung des abstrakten Zahlbegriffs. Nach Pestalozzi gewinnt das Kind den Zahlbegriff durch Zählen**,** indem es wechselnde Gegenstände mit der stets gleich bleibenden Reihe der Zahlwörter benennt.

> *„...durch dieses fortdauernde Bleiben des einen, sowie durch das fortdauernde Abändern des anderen, sondert sich dann im Geist des Kindes der Abstraktionsbegriff der Zahl, das ist das bestimmte Bewusstsein der Verhältnisse von mehr und minder, unabhänged von den Gegenständen...“ (zitiert nach A. Lobeck)*

Als Anschauungsmittel dienten konkrete Zählobjekte wie Erbsen, Steine, Hölzer usw. sowie vor allem auch Pestalozzis Einheitstabelle mit ihren Strichen, deren Praktikabilität allerdings recht umstritten war.

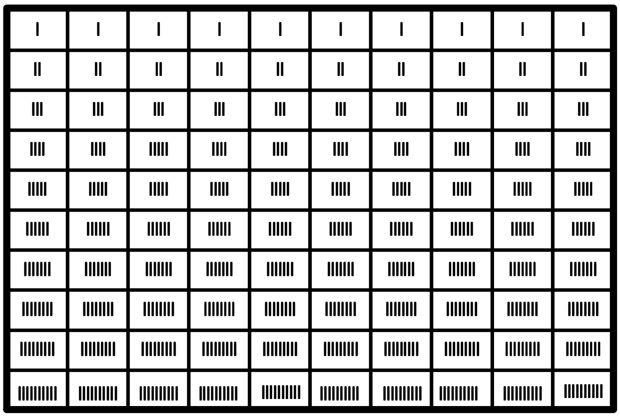

Abb. 7: **Pestalozzis Einheitstabelle**[1]

Durchgesetzt hat sich hingegen ein anderes Mittel zur Veranschaulichung des Zahlenraums bis 100: Die von Jakob Heer in seinem *„Lehrbuch des Denkrechnens“* von 1836 erstellte **Hundertertafel.** Leider fand ich keine Information über das ursprüngliche Aussehen dieser Tafel.
In den unteren Schulklassen sind bis heute vor allem folgende Veranschaulichungen gebräuchlich:

[1] Arnold Lobeck

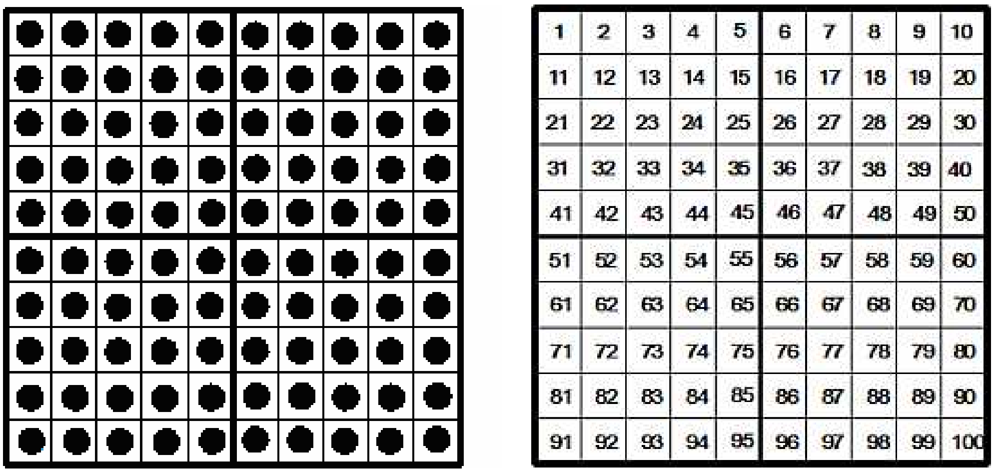

Abb. 8: **Hundertertafeln**[1]

Ein ähnliches Prinzip für den Zahlenraum bis 100 ist auch der Zählrahmen, der heute vor allem im Vorschulalter beliebt ist. Er besteht aus 10 Drähten, auf denen sich je 10 Kugeln befinden, die verschoben werden können.

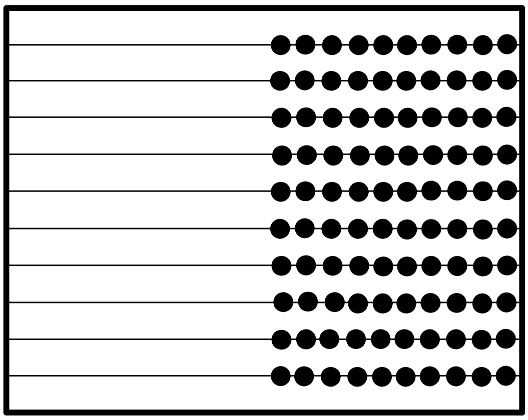

Abb. 9: **Zählrahmen**

Hundertertafel und *Zählrahmen* sind unzweifelhaft nahe Verwandte. Es stellt sich die Frage, was ursprünglicher war? Da die Reformpädagogen die *„Anschauung*“ positiv bewerteten, konkrete *Hilfsmittel* hingegen ablehnten, kann man mit einer gewissen Berechtigung davon ausgehen, dass die Hundertertafel als Vorlage für den späteren Zählrahmen diente. So liesse sich erklären, warum das „deutsche Schulrechenbrett“ (vgl. Abb. 6) seine Funktion als Stellen-Abakus einbüsste und zu einem Zählrahmen für Vorschüler und Erstklässler mutierte.

[1] Radatz u. Schipper

Mit der Betonung der Anschauung und des Kopfrechnens ergab sich für den Rechenunterricht eine weitere einschneidende Veränderung: Es wurde nun nicht mehr von Anfang an in ausgedehnten Zahlenräumen gerechnet – wie dies beim Rechnen mit dem Abakus und dem schriftlichen Stellenrechnen üblich gewesen war – sondern man verweilte bei den Zahlen 1 bis 10, dann 10 bis 20 und weitete von dort den Zahlenraum sukzessiv zunächst nur bis 100 aus.
Dieses methodisches Prinzip, das noch heute den Rechenunterricht der beiden ersten Grundschulklassen bestimmt, war aus reformpädagogischer Sicht wohl nahe liegend.
Aus meiner Sicht ist diese Entwicklung jedoch zu bedauern, weil dadurch die Einsicht in das Stellenprinzip unserer Zahlschrift und damit das Erlernen des Rechnens unnötig erschwert bzw. lernbehinderten Kindern nicht selten gar verunmöglicht wird.[1]

Bleibt die Frage, warum die Kinder in den ersten Schuljahren so genannte *„halbschriftliche“* Rechnungen durchführen, bei denen die zu addierenden bzw. zu subtrahierenden Zahlen horizontal dargestellt und nach Art mathematischer Gleichungen zu lösen sind?[2]
Die Vermutung, dass diese Darstellungsform auf das Linienrechnen der mittelalterlichen Abakisten (vgl. Abb. 4) zurückgeht, ist wohl nicht ganz auszuschliessen
Es scheint mir jedoch plausibler, die Bevorzugung der a**lgebraischen Operation** des „*Einrenkens und Gegenüberstellens*“ (von der oben die Rede war) in Verbindung zu bringen. mit dem reformpädagogischen Anliegen: Rechnen solle in erster Linie ein Mittel zum Erlernen des Denkens sein. Da der operative Umgang mit Variablen und Gleichungen bekanntlich recht hohe Anforderungen an das Denkvermögen und die Beweglichkeit des Denkens stellt, kann so dieser Anspruch bestens erfüllt werden.
Für lernschwache Kinder aber sind solche Anforderungen oft nicht nur wenig hilfreich, sondern haben unter Umständen sogar negative Auswirkungen. Kurz und bündig hat ein kompetenter Sonderpädagoge dies so zusammengefasst: „Nicht die grossen Logiker, sondern die Rechenschwachen kennzeichnen die Ergebnisse“ (W. Radigk).

[1] Schulbücher für lernbehinderte Kinder zeigen, dass dieses methodische Prinzip zu einer sehr langsamen Bearbeitung des Zahlenraums in kleinen und kleinsten Schritten führte, was von R. Kutzer zu Recht als „struktur**des**orientierend“ bezeichnet wird.

[2] Während einer gewissen Übergangszeit wurden früher auch beide Versionen – das „halbschriftliche“ und das „schriftliche“ Rechnen - parallel eingeübt. So sind in einem Thurgauer Rechenbuch aus dem Jahr 1843 – es befindet ich im Schulmuseum Mühlebach/Amriswil - alle Additions- und Subtraktionsaufgaben jeweils sowohl horizontal als auch vertikal dargestellt und berechnet.

8. Ausblick

Der hier skizzierte Rückblick in die Geschichte des Rechnens und des Rechenunterrichts hat mich in der Überzeugung bestärkt, dass ich mit dem **Besta-Rechenkonzept**[1] auf dem richtigen Weg bin.

Zum Einen kommen hier zwei geschichtlich bedeutsame Linien zusammen, die für die Entwicklung des Rechnens entscheidend waren: Das Rechnen mit dem römischen Stellen-abakus und das algorithmische („schriftliche“) Rechnen mit dem indisch-arabischen Zahlensystem.

Überdies liegt das Konzept auch auf der Linie von Adam Riese, der in einem berühmten Lehrbuch das (algorithmische) Ziffernrechnen (*Rechnen mit der Feder)* didaktisch anhand des Abakus einführte.

Auch die in das Konzept übernommene Arbeit mit den Fingermengen zur Vermittlung der Zahlbeziehungen innerhalb der Dekaden lässt sich aus historischer Sicht bestens rechtfertigen.[2]

Bewährt hat sich das Besta-Konzept in der Arbeit mit kognitiv beeinträchtigten Menschen nicht zuletzt auch deshalb, weil es den in Verruf geratenen „*realen*“ bzw. „*materiellen*“ Aspekt des Rechenunterrichts wieder in den Vordergrund rückt, das Rechnen also sozusagen vom ‚mathematischen Kopf’[3] wieder auf die ‚arithmetischen Füsse’[4] stellt.

Literatur

- Bossong, Georg: Das Maurische Spanien, Geschichte und Kultur. München, 2007
- Egger, Jakob: Methodisch-praktisches Rechenbuch für Schweizerische Volksschulen und Seminarien. Bern, 1858, 5. Auflage
- Gerritzen, Lothar (Hrsg.): Zwanzigeins. Für die unverdrehte Zahlensprechweise. Bochum, 2008
- Ifrah, Georges: Universalgeschichte der Zahlen. Frankfurt/New York, 1986
- Kluge, Friedrich: Etymologisches Wörterbuch der deutschen Sprache. Berlin, 1989, 22. Auflage
- Kutzer, Reinhard: Mathematik entdecken und Verstehen. Frankfurt a..M., 1983
- Lobeck, Arnold: Rechenschwäche. Geschichtlicher Rückblick, Theorie und Therapie. Luzern, 2. Aufl. 1996
- Menninger, Karl: Zahlwort und Ziffer. Eine Kulturgeschichte der Zahl. Göttingen 1979, 3. Aufl.
- Radatz, Hendrik / Schipper, Wilhelm: Handbuch für den Mathematikunterricht an Grundschulen. Hannover, 18. Aufl., 2007

[1] Beatrix Staub-Verhees: Das Besta-Konzept – ein alternativer Ansatz zum Erlernen des Rechnens mit intellektuell behinderten Kindern, Jugendlichen und Erwachsenen.

[2] Noch im Mittelalter wurde das Fingerrechnen sogar auf den Universitäten gelehrt.

[3] ‚Mathematik’ ist eine Spezialisierung der ursprünglich allgemeineren Bedeutung ‚Wissenschaft’ auf eine bestimmte Disziplin, nämlich der ‚Lehre von den Zahlen’. (Kluge)

[4] ‚Arithmetik’ ist abgeleitet von Zahl und bedeutet Rechnen, Rechenkunst (Kluge).

- Radigk, Werner: Kognitive Entwicklung und zerebrale Dysfunktion. Dortmund, 3. Aufl. 1991
- Unger, Andreas: Von Algebra bis Zucker. Arabische Wörter im Deutschen. Stuttgart, 2006

* * *