Modul A

Allgemeine Einführung

* * *

„Ein Sachverhalt ist denkbar, heisst: Wir können uns ein Bild von ihm machen." (Wittgenstein)

„Die Entdeckung des Positionssystems hat alle Hindernisse hinweg gefegt und die Arithmetik selbst dem stumpfesten Geist zugänglich gemacht." (Ifrah)

Leitgedanken des Besta-Konzepts

1 Das Positionssystem (Stellenwertsystem)

1.1 Das Konzept basiert auf der Überzeugung, dass es aus theoretischen Gründen nahe liegend und aus praktischen Gründen zweckmässig ist, das Rechenprogramm von Beginn an gemäss dem Prinzip des Positionssystems – auch als Stellenwertprinzip bezeichnet – aufzubauen.

Wir alle kennen das Prinzip des Positionssystems: Die durch die Zahlen bzw. Ziffern repräsentierte Grösse einer Menge hängt davon ab, an welcher Stelle dieses Symbol steht. So sind beispielsweise den drei identischen Ziffern in der Zahl „222“ unterschiedlich grosse Mengen zugeordnet, nämlich je zwei Mal die Menge 100, die Menge 10 und die Menge 1.

In einem Stellenwertsystem geht man stets von einer Basis- oder Grundzahl aus. In unserem gebräuchlichen System ist dies die **Grundzahl 10**, worin sich übrigens eine noch ältere und ursprünglichere Rechentradition widerspiegelt: Das Zählen und Rechnen mit den Fingern.
Das traditionelle Zahlensystem wird deshalb auch als „dekadisch“ oder „dezimal“ bezeichnet. Das heisst konkret: Je 10 Einheiten einer Position entsprechen 1 Einheit der nächsthöheren Position.
Dadurch wird der Rechenvorgang algorithmiert, das heisst, er wird auf Rechenschritte mit Zahlen bis 10 reduziert.

Konsequent umgesetzt wird dieses Prinzip normalerweise beim so genannten schriftlichen Addieren und Subtrahieren mehrstelliger Zahlen.[1] Dabei sind die Zahlen gemäss dem a***lgorithmischen Modus*** untereinander (vertikal) angeordnet:

[1] Es ist m.E. irreführend, nur diesen Modus als „schriftliches Rechnen“ zu bezeichnen, denn auch algebraische Aufgaben werden ja bekanntlich nicht nur mündlich vorgegeben. Wenn Aufgaben in schriftlicher Form vorgegeben werden, geht es in beiden Fällen um eine visuelle Fixierung zur Entlastung der Speicherkapazität – und das ist umso nötiger, je umfangreicher und komplexer die Operationen sind. Zum Begriff „schriftliches Rechnen“ vgl. auch meine Ausführungen zum Thema: „Eine kleine Kulturgeschichte des Rechnens und des Rechenunterrichts“.

$$
\begin{array}{r}
6\,5\,4\,8 \\
+\,3\,2\,3\,6 \\
{\scriptstyle 1} \\
\hline
\underline{\underline{9\,7\,8\,4}}
\end{array}
$$

Dieser Rechenmodus wird aber in unseren Schulen nicht von Anfang an gelehrt, sondern erst dann, wenn das Rechnen mit grösseren Zahlen auf dem Programm steht, die Anforderungen an das herkömmliche Rechnen ‚im Kopf' (wo die Zwischenergebnisse behalten werden müssen) also zu komplex geworden sind.

1.2 Lange habe ich nach einer Erklärung dafür gesucht, warum der Erstrechenunterricht dieses Stellenwertrechnen nicht vermittelt, stattdessen ein Zeit und Energie raubender Umweg in Kauf genommen wird, der vor allem vielen kognitiv beeinträchtigten Menschen das Verständnis für grössere Zahlen und das Operieren mit ihnen erschwert, nicht selten sogar verunmöglicht.[1] Denn in den ersten Schuljahren – zu einem Zeitpunkt also, wenn die Kinder in der Regel noch keine stabile Zahlraumvorstellung aufgebaut haben – erlernen sie das Rechnen als *Mathematik* im Sinne des *algebraischen* Modus *mit variablen Gleichungen*, wobei die *horizontal* angeordneten Zeichen auf verschiedene Arten variiert werden:

48 + 36 = ? // 48 + ? = 84 // ? + 48 = 84

Solche Lückenaufgaben eignen sich zweifellos zur Förderung des flexiblen Denkens, was im Prinzip ein erstrebenswertes Ziel ist. Schwächere Kinder sind aber mit solchen Aufgaben oft überfordert und verbinden damit den Beginn frustrierender Rechenprobleme.

Es soll nicht in Abrede gestellt werden, dass der Zahlenraum bzw. die Rechenmodalitäten auf unterschiedliche Weise und anhand verschiedener Hilfsmittel veranschaulicht werden können.
Für die algebraischen Aufgaben würde sich eigentlich das Modell der Waage am besten eignen, da sich auf diese Weise sowohl der variable Umgang mit den Zahlen wie auch das Gleichheitszeichen gut erklären liesse. Offensichtlich aber hat sich diese Möglichkeit nicht durchgesetzt, und zwar vermutlich deshalb, weil sich damit zwar der *Modus der Gleichung*, nicht aber eine Vorstellung des *Zahlenraums* vermitteln lässt.

[1] Eine mögliche Erklärung ist nachzulesen in meinem Beitrag „ Eine kleine Kulturgeschichte des Rechnens u. des Rechenunterrichts"

Als Modell für den Zahlenraum bis 100 hat sich das Prinzip des *Zählrahmens* in seinen verschiedenen Variationen in deutschsprachigen Ländern weitgehend durchgesetzt. Auf der Bildebene ist dieses Modell als *Hundertertafel* bereits seit 1836 bekannt, bis heute weit verbreitet und immer noch sehr aktuell.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

Abb.1: **Hundertertafel**

Vor allem lernbehinderte Kinder mit räumlichen Problemen haben jedoch aus verständlichen Gründen oft Schwierigkeiten mit dieser Darstellung des Zahlenraums.

> Im Zusammenhang mit der abendländischen Schreibrichtung bilden je 10 Elemente bzw. Zahlen von links nach rechts eine horizontale Reihe; dadurch sind die vollen Zehner jeweils auf der rechten Seite situiert, stehen somit also invers zur Konstellation der Ziffern.
>
> Damit geht einher, dass bei diesem Modell wiederholt die räumlichen Koordinaten gewechselt werden: Die eine Reihe verläuft horizontal von links nach rechts, jene der vollen Zehner vertikal von oben nach unten.
>
> Bei der Erweiterung dieses Modells schliesslich, bei dem die Hundertergitter zu einem Tausender-Würfel aufgeschichtet werden (Montessori-Modell), kommt mit der Höhe nochmals eine weitere räumliche Dimension ins Spiel.
>
> Wenn andererseits – wie ich es wiederholt sah – zehn mit Zahlen voll-geschriebene Hundertertafeln nebeneinander an der Wand aufgereiht sind, steht den Lernenden täglich das noch zu bewältigende grosse Lernpensum vor Augen, während sich ihre Rechenkünste irgendwo in den ersten Reihen der ersten Tafel bewegen.

Je älter ein Kind wird, je grösser sein Rückstand ist und je mehr seine Motivation abnimmt, desto häufiger werden – etwa bei einem Wechsel der Lehrperson oder der Klasse – die Versuche, den Zahlenraum erneut aufzubauen, den Lernstoff auf andere Art und mit neuen Hilfsmitteln verständlicher zu machen. Und wenn sich auch noch andere

Bezugspersonen (Eltern, Geschwister usw.) im Laufe der Jahre in diese Bemühungen einschalten, dann ist das Chaos erst recht programmiert: Statt Abhilfe zu schaffen, stiftet dies nur noch mehr Verwirrung, da den Kindern der Durchblick auf die Struktur unseres Zahlensystems immer weniger gelingt.

1.3 Die Hundertertafel ist meines Erachtens kein geeignetes Hilfs- bzw. Anschauungsmittel für unser Zahlensystem. Denn die Struktur unseres Zahlensystems ist das Stellenwertprinzip. Ihm entspricht das algorithmische Rechenverfahren, das am einfachsten und schnellsten zu vermitteln und zu erlernen ist.

Dass ich mit dieser Meinung nicht alleine stehe, sollen folgende Zitate zeigen:

> *„Die Entdeckung des Positionssystems hat alle Hindernisse hinweggefegt und die Arithmetik selbst dem stumpfesten Geist zugänglich gemacht“*. (Ifrah, 1986, S. 480)

Ein entschiedener Befürworter dieses Ansatzes vor allem für lernbehinderte Kinder ist der anerkannte (inzwischen leider verstorbene) Fachmann *R. Kutzer*, der seine positiven Erfahrungen so beschreibt:

> *„Die Mehrzahl der überprüften Sonderschüler war im Laufe weniger Wochen in der Lage, die Struktur des Positionssystems auf einer so hohen Niveau- und Komplexitätsstufe zu erfassen, zu der die meisten der nach herkömmlichen Konzepten unterrichteten Kinder im Verlaufe von acht Schuljahren nicht gelangte.“* (1985, S. 37)

Zu seinem grossen Bedauern konnte *Kutzer* diese Überzeugung in seinem dreibändigen *Lehrprogramm für den Mathematikunterricht an Schulen für Lernbehinderte* nicht konsequent umsetzen. Denn er hatte sich an den vorgeschriebenen Rahmenlehrplan des deutschen Bundeslandes Hessen zu halten, der an diesen Schulen den Unterrichtsstoff der beiden ersten Jahre auf den Zahlenraum bis 20 beschränkt.
Diese Einschränkung widerspricht seiner

> *„. . . Konzeption, die darauf abzielt, von Beginn an einen verstehenden Umgang mit zwei- und mehrstelligen Zahlen zu ermöglichen . . . Dies ist vor allem dadurch begründet, dass wesentliche Erkenntniselemente des Positionssystems (generalisierte Einsichten) nur durch den Schritt vom Zahlbereich 0 bis 10 zum Zahlbereich 0 bis 100, keinesfalls aber im Zahlbereich 0 bis 20 gewonnen werden können.“* (1991, S. 48)

Da aber der Rahmenlehrplan im Zahlbereich bis 100 am – sehr viel schwierigeren –

Rechnen mit horizontalen Gleichungen festhält, behalf sich Kutzer mit einem Ausweg: Er liess die Schülerinnen und Schüler Aufgaben mit zweistelligen Zahlen zuerst in algorithmischer Form berechnen, weil

> *„. . . die vertikale Schreibweise wegen der besseren Betonung des Positionssystems auf der Ebene der konkreten Handlung den Vorrang haben sollte . . .“*[1] (1985, S. 73)

> *„. . . und erst dann, wenn die Schüler die Aufgaben auf dieser positions- und strukturgerechteren Schreibweise auf der Stufe der vorstellenden Mengenoperation sicher lösen können, sollte zur horizontalen Schreibweise übergegangen werden.“* (1985, S. 71)

Nur auf diese Weise könne den Lernenden namentlich auch das Verständnis für den Zehnerübergang vermittelt werden:

> *„Der Zehnerübergang kann als solcher nur erfasst werden, wenn dem Schüler die Bedeutung der Zahlen im Positionssystem (Zahlenebene) auf der Grundlage des Bündelungssystems (Mengenebene) bewusst wird. Dies ist nach herkömmlichen Konzepten, die bei der Erweiterung des Zahlbereichs zunächst den Schritt vom Zahlbereich 0 - 10 zum Zahlbereich 0 - 20 tun, nicht möglich. Wir legen deshalb grossen Wert darauf, dass die Kinder vor der Einführung der Zehnerübergänge die Bedeutung des Zehners kennen und Grundelemente des Positionssystems verstanden haben.“* (1985, S. 76)

1.4 Glücklicherweise war ich bei meinen Förderungsbemühungen nicht an Vorgaben gebunden und konnte mich deshalb von Anfang an auf die Arbeit mit dem Positionssystem konzentrieren.
Dieser Ansatz lag ohnehin nahe, weil der Schwerpunkt meiner Bemühungen während einiger Zeit darin bestand, Jugendlichen – die trotz ihrer recht guten praktischen Intelligenz über keine oder nur eine sehr dürftige Rechenfertigkeit verfügten – die nötigen Kenntnisse für den Umgang mit Geld zu vermitteln.

Dabei war es wenig hilfreich, dass sich ihre Kenntnisse bezüglich Geld oft darauf beschränkten, was sie zuvor am häufigsten eingeübt hatten und am besten beherrschten: Sie ordneten die Geldmünzen in einer horizontalen Reihe vom kleinsten zum grössten Wert folgendermassen an:

5 Rp.   10 Rp.   20 Rp.   50 Rp.   1 Fr.   2 Fr.   5 Fr.

[1] Leider konnte ich vom früh verstorbenen Autor nicht mehr in Erfahrung bringen, warum er seine Überzeugung nicht mit einem entsprechenden Handlungs- bzw. Vorstellungsmodell veranschaulichte, sondern das horizontale Bild der Lokomotive mit ‚Zehner-Wagen’ wählte.

Diese Aneinanderreihung entspricht jedoch in keiner Weise dem Stellenwertprinzip, wie es sich auf der Zahlenebene in Form der Preise manifestiert. Eine angemessenere Darstellung für den Betrag von 8. 85 Fr., der alle Schweizer Münzen umfasst, ist vielmehr die folgende Anordnung:

5 Fr.	50 Rp.	5 Rp.
2 Fr.	20 Rp.	
1 Fr.	10 Rp.	

Von daher war es nur noch ein kleiner Schritt zur Idee, das **Positionssystem** in ein **Handlungsmodell** umzusetzen, das im Sinne eines Abakus[1] für das Erlernen des Rechnens mit Geld – bzw. in modifizierter Form auch für das Zählen und Rechnen mit anderen Mengen – dienen kann.
Weitere Ausführungen dazu finden sich in den Modulen B und C.

2 Strukturiertes Zählen bis 100

2.1 In den beiden Besta-Lernprogrammen nimmt die Lerneinheit „Zählen" zu Beginn der Arbeit einen breiten Raum ein. Dabei geht es einerseits um den Aufbau des Positionssystems und – damit einhergehend – gleichzeitig um die Erarbeitung der Systematik der Zahlenreihe wie auch um die enge Verknüpfung zwischen Mengen, Zahlwörtern und Ziffern.

Zählen ist der älteste und elementarste Umgang mit quantitativen Gegebenheiten.
Beim Zählen wird jedem Element der Menge ein Symbol – also ein Wort, eine Gebärde oder ein Schriftzeichen – zugeordnet. Jedes Symbol ist eine *Ordnungszahl innerhalb* der durch das Zählen entstehenden *Reihenfolge*. Die Ordnungszahl des letzten Gegenstandes der Menge ergibt gleichzeitig die Anzahl ihrer Bestandteile.
Der Akt des Zählens beinhaltet also stets zwei miteinander zusammenhängende Aspekte: Der ***kardinale Aspekt*** entspricht der Anzahl der Elemente einer Menge als der letzten Zahl; dies aber setzt den ***ordinalen Aspekt*** voraus, der darin besteht, dass man

[1] Damit hatte ich - ohne es damals bereits zu wissen - das alte römischen Rechenbrett sozusagen neu erfunden.

beim Zählen von jeder Zahl auf die Nächste in der immer gleichen Reihenfolge übergeht.

Nach Ifrah (1986, S. 45 f.) kann der Mensch nur zählen, wenn er gleichzeitig über drei Fähigkeiten verfügt.

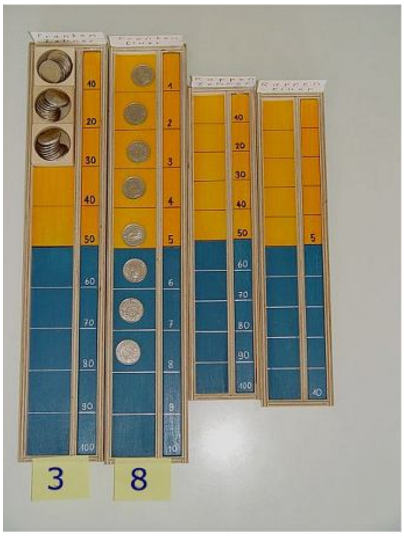
> *„1. Er muss in der Lage sein, jedem Gegenstand einen „Rang“ zuteilen zu können.*
> *2. Er muss die jeweilige Einheit auf die vorangegangenen zurückbeziehen können.*
> *3. Er muss vom schrittweisen Vorgehen des Zählens auf die gleichzeitige Existenz des Gezählten schliessen können.“*

Der Zählvorgang ist also anspruchsvoller als es auf den ersten Blick scheint; und deswegen haben sich die Menschen dabei schon immer verschiedener Hilfsmittel bedient:

Sogar das blosse Zählen ohne Verbindung mit irgendeiner Rechenart, erfordert schon Aufmerksamkeit und Gedächtnis, um nicht zu irren; daher trifft man schon bei den ältesten und rohesten Nationen . . Hilfsmittel an, die mehr oder weniger geschickt waren zu Hülfe zu kommen.“ (J. P. Bischoff, 1904; Nachdruck 1990, S. 19)

2.2 Im Besta-Konzept ist dieses Hilfsmittel das so genannte **Handlungsmodel** bzw. der **Besta-Abakus:**

Bestehend aus nebeneinander liegenden Brettern mit je 10 Einheiten, ist es ein Abbild des Positionssystems, das auf der Mengenebene die Struktur für die Zähl-übungen bereitstellt.



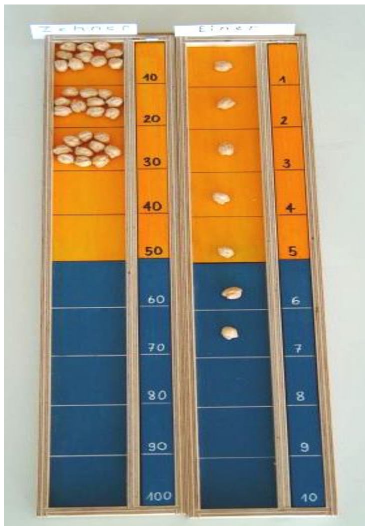


Abb. 2 b: **Besta-Abakus für Modul B** Abb. 2 : **Besta-Abakus für Modul C**

Dabei werden mehrere Ziele gleichzeitig angestrebt:

- Einerseits geht es darum, die ungegliederte Zahlwortreihe im Sinne des räumlich vorgegebenen Positionssystems zu strukturieren („strukturiertes Zählen“).
- Damit einhergehend wird andererseits die Systematik unseres dezimalen Zahlensystems – das Prinzip des Stellenwertsystems – erarbeitet und gefestigt („strukturierendes Zählen“),
- wobei durch das Bündeln der 10 Einer zu 1 Zehner eine enge Verbindung zwischen dem Handeln mit Mengen und dem späteren Rechnen mit Zahlen hergestellt wird.
- Durch die wiederholten Zählübungen und Mengenbestimmungen im Rahmen dieser stabilen räumlichen Koordinaten erwerben die Lernenden allmählich ein Ortsbewusstsein für die Zahlen und ihre gegenseitigen Beziehungen und damit eine wichtige Voraussetzung für das Rechnen.
- Nur eine solche Konstanz der Ordnung und der Wahrnehmung schafft auch die Voraussetzungen für die Entwicklung eines festen Bezugssystems und damit auch für den Aufbau der Vorstellungs- und Abstraktionsfähigkeit.

Diese Zusammenhänge hat vor Jahrzehnten ein Autor trefflich so festgehalten:

Die Zahlwörter bilden diffuse Ganzreihen von gleichwertigen homogenen Elementen. Das Zählenlernen besteht nun darin, dass sich diese struktur-homogenen Ganzreihen zu einem gegliederten Strukturaufbau von Zahlen umbilden, wo jede Zahl ihre Raumortsbestimmtheit und damit ihren Zahlencharakter hat.
Tritt nun das Zahlwortsprechen gemeinsam mit dem Reihungsgeschehen auf, so erhält jedes einzelne der bisher gleichwertigen (homogenen) Elemente eine gewisse raumzeitlich bestimmte Stelle; ihre Homogenität verschwindet nach und nach und es beginnt der Aufbau der gegliederten Struktur. (W. Oehl, 1935, S. 305 – 351)[1]

3 Operieren mit simultanen Mengen (Rechnen)

3.1 Vom Zählen zum Rechnen ist es nur ein kleiner Schritt, da ja das Zählen im Prinzip eine „eins-plus-eins-Rechnung“ ist.

Und doch ist es auch ein grosser Schritt, wenn bzw. weil das *„zählende Rechnen“* durch das ***Operieren mit Mengen*** abgelöst werden muss.

[1] Wegen Kürzungen und redaktionellen Änderungen handelt es sich nicht um ein wörtliches Zitat.

Die **Operation** ist ein dreiteiliges Geschehen, bestehend aus der Ausgangszahl, dem operativen Schritt und dem Endergebnis. Der *operative Schritt* beschränkt sich im hier vorliegenden Konzept auf das Addieren und Subtrahieren.

Das Rechnen unterscheidet sich vom Zählen wesentlich dadurch, dass es um das Operieren mit ***simultanen (ganzheitlichen) Mengen*** geht.
Bei einer ungeordneten Anzahl von Elementen ist dieses *simultane* (*auf einen Blick)* Erfassen nur in begrenztem Masse – nämlich bis zu 4 Elementen – möglich. Darüber hinaus ist eine ganzheitliche Erfassung nur mittels bestimmter Konfigurationen der jeweiligen Mengen zu so genannten Zahlbildern (wie beispielsweise den Würfelbildern oder Fingermengen) möglich. Solche – oft sehr individuellen und teilweise mit Gegenständen assoziierten – Zahlenbilder haben allerdings oft den Nachteil, dass den Kindern der ordinale Aspekt der Zahl, also die Ordnungsreihe, nicht oder zu wenig transparent wird.

Aus solchen Überlegungen heraus wird im Besta-Konzept **innerhalb der Positionen** eine Verbindung von Zahlen*reihe* und Zahlen*bild* angestrebt. Ermöglicht wird dies im Handlungsmodell durch die farbige Strukturierung in je 5 gelbe und blaue Teilmengen, was sich nicht zuletzt aufgrund der natürlichen Struktur unserer beiden Hände aufdrängt.[1] Damit wird erreicht, was für Anfänger im Rechnen zunächst wesentlich ist: dass die Ausgangsmenge innerhalb der Zahlenreihe schnell auffindbar ist bzw. nach erfolgter Berechnung das Ergebnis ganzheitlich situiert werden kann.

Durch die farbliche Strukturierung der Zahlenreihe 1 bis 5 (gelb) bzw. 6 bis 10 (blau) machen die Lernenden überdies die Erfahrung, dass sich Zahlen aus dem Ordnungsgefüge der Reihe herauslösen müssen, um neue Mengen zu bilden. Wenn sie beispielsweise die *Menge 7 als 5 Gelbe und 2 Blaue* wahrnehmen, dann lernen sie verstehen, dass „2“ nicht nur im Sinne der Ordnungszahl an der zweiten Stelle der Zahlenreihe steht, sondern an irgendeinem beliebigen Ort innerhalb der Zahlenreihe situiert sein kann. Dieses Verständnis von der ***strukturellen Freiheit der Zahl*** ist eine wesentliche Bedingung für das Durchführen der Operationen.

---

[1] Ich hatte seinerzeit dieses Prinzip betont, noch bevor auch die Autoren des Lehrmittels *Das Zahlenbuch* die Wichtigkeit der Fünferstruktur als das sicherste Mittel gegen das zählende Rechnen hervorheben.

3.2 Da das Besta-Konzept von Beginn an den Zahlenraum in Form des Positionssystems einführt, können sich die zu erlernenden Rechnungen auf den Zahlenraum bis 10 beschränken.

Denn alle Stellen sind gleichermassen dekadisch aufgebaut, und deshalb bleiben die Zahlbeziehungen *innerhalb der Stellen* bis in hohe Zahlenräume gleich.

Die Rechnung *4 Milliarden plus 3 Milliarden* ist somit nicht schwieriger zu rechnen als *4 Hundert plus 3 Hundert* und beide erfordern die gleichen Rechenkünste wie *30 plus 40* bzw. *3 plus 4.*

Es versteht sich von selbst, dass das schriftliche Rechnen mit Ziffern auch im basalen Zahlenraum zwingend in Form der vertikalen Darstellung erfolgt. Denn diese Schreibweise „ . . . *stützt die Erkenntnis, dass die Zahloperationen in Teiloperationen untergliedert sind, die sich jeweils nur auf eine Stelle beziehen.*“ (Kutzer, 1985, S. 69).

3.3 **Additionen** sind **kommutativ**, d. h. dass die zu addierenden Summanden austauschbar sind: *7 plus 2* ergibt gleich viel wie *2 plus 7*. Dadurch verringert sich nicht nur beträchtlich die Anzahl der Aufgaben, sondern die Operation wird auch erheblich erleichtert.

In Diskussionen wurde gelegentlich die Auffassung vertreten, diese *Minimalstrategie* sollten die Lernenden selbst entdecken, ihnen also nicht vermittelt werden. Abgesehen davon, dass die Herkunft dieser Erkenntnis ohnehin nicht immer offenkundig ist wenn sie beispielsweise von Eltern oder Geschwistern stammt, plädiere ich dafür, den lernbehinderten Schülerinnen und Schülern diese mathematische Gesetzmässigkeit nicht vorzuenthalten.

3.4 **Subtraktionen** sind aus verschiedenen Gründen wesentlich schwieriger und deshalb neigen Kinder bei dieser Operation vermehrt dazu, aufs *zählende* Rechnen zurückzugreifen, statt mit simultanen Mengen zu operieren.

Anders als im Erstrechenunterricht der Regelschule, wo die Subtraktion als Umkehroperation der Addition ungefähr gleichzeitig zu dieser erarbeitet wird, verschiebt sich dieses Thema im Besta-Konzept auf einen sehr viel späteren Zeitpunkt. Denn die Subtraktion setzt meines Erachtens eine grössere Beweglichkeit des rechnerischen Denkens voraus, und deshalb erachte ich es als sinnvoller, zuerst eine solide Basis im Umgang mit Mengen und Zahlen zu legen.

Entgegen dem ersten Eindruck stellt bereits das **Zählen** grössere Anforderungen, obwohl es sich dabei doch nur um die umgekehrte Richtung zu handeln scheint: Im einen Fall vorwärts, im anderen Fall rückwärts.
Effektiv jedoch ist der Unterschied sehr viel grösser. Beim *Vorwärtszählen* beginnt der Additionsschritt mit der auf den ersten Summanden folgenden Zahl, und das Ergebnis ist identisch mit der beim Weiterzählen zuletzt genannten Zahl (z. B. bei der Aufgabe 5 + 3 geht es zählend weiter: 6 – 7 – 8).
Beim ***Rückwärtszählen*** – z. B. 3 Zählschritte rückwärts von 5 – beginnt hingegen der Rückwärtsschritt beim Minuend (5), während das Ergebnis (2) am Ende des Zählakts nicht mehr genannt wird.

Beim **Operieren mit Mengen** entfällt diese Schwierigkeit zwar, da hierbei die Parallelität der vermehrenden und vermindernden Operation auf der *Handlungsebene* augenscheinlich ist (z. B. *5 plus 2 gibt 7* bzw. *7 minus 2 gibt/bleibt 5*).
Allerdings ergibt sich hier eine Schwierigkeit dadurch, dass die Entfernung zwischen dem Ausgangspunkt der Rechnung (Minuend) und dem gesuchten Endpunkt je nach Grösse der zu subtrahierenden Zahl (Subtrahend) unter Umständen relativ weit auseinander liegt (wie z. B. in der Aufgabe 9 minus 7). Dies wiederum hängt damit zusammen, dass die Subtraktion nicht kommutativ ist, weil im natürlichen Zahlenraum der Subtrahend stets kleiner oder gleich dem Minuend sein muss. Dadurch werden die Rechnungen sowohl zahlreicher, wie auch die simultane Erfassung dieser *rückwärts greifenden* Operation wesentlich schwieriger.

Um diese Schwierigkeit des Abziehverfahrens zu vermeiden, ist es beim sogen. „schriftlichen Rechnen“ verbreitet üblich, die Subtraktion im Sinne der Vorwärtsstrategie als *Ergänzung* zu berechnen. Die sprachliche Umsetzung dieser Operation – *„von 7 auf 9 gibt/sind 2“* oder *„7 plus 2 gibt 9“* – rückt den mathematischen Aspekt der Differenz in den Mittelpunkt. Das *Wegnehmen* bzw. *Abziehen* wird dadurch jedoch nicht mehr unmittelbar transparent, sondern es wird sogar eine Additionsaufgabe suggeriert. Ein solches Vorgehen ist vor allem lernbehinderten Kindern (aber nicht nur ihnen) schwer verständlich zu machen.

Im vorliegenden Konzept habe ich mich darum bemüht, die Nachteile der beiden skizzierten Subtraktionsverfahren zu vermeiden resp. ihre Vorteile miteinander zu verbinden. Dabei wird das ***Abziehverfahren*** auf der Mengen- bzw. Handlungsebene je nach der Mengenstruktur unterschiedlich gehandhabt:

> Bei der Aufgabe „*8 weg 3*“ beispielsweise ist es naheliegend, das 8., 7. und 6. Element im Sinne der Rückwärtsstrategie simultan wegzunehmen (z. B. die 3 Erbsen auf blauem Grund oder die 3 Finger an der einen Hand). Hingegen ist es bei der Aufgabe „*8 weg 5*“ einfacher, die Menge 5, also das 1. bis 5. Element (z. B. die Erbsen auf gelbem Grund bzw. die Finger der anderen Hand) wegzunehmen. Dieses Vorgehen setzt allerdings voraus, dass die Lernenden das Prinzip der strukturellen Freiheit der Menge eingeübt und somit bereits eine gewisse Flexibilität im Umgang mit Mengen und Zahlen erworben haben.

Eine weitere Schwierigkeit besteht darin, dass die Repräsentationsebenen [vgl. nachfolgendes Kapitel] bei der Subtraktion nicht unmittelbar kompatibel sind. Während nämlich *beim Handeln* die Menge effektiv weggenommen werden kann, oder bei einer bildlichen bzw. schematischen Darstellung die Menge wegradiert werden kann, würde das analoge Vorgehen auf der Ziffernebene – also das Eliminieren des Subtrahenden – zu einem völlig falschen Ergebnis führen.

Schliesslich ist auch die Darstellung der Operation auf der Zahlenebene verwirrend[1]. Denn was visuell wahrgenommen wird – nämlich dass in der Rechnung zuerst die eine *und* (!) dann die andere Zahl *folgt*, womit also eine Vorwärtsstrategie suggeriert wird – muss nun operativ unterdrückt werden. Die Operation selbst drückt sich nur noch über das kleine abstrakte Vorzeichen aus. Es ist deshalb nicht immer nur mangelnde Konzentration, wenn manche Schülerinnen und Schüler dazu neigen, Subtraktionsaufgaben fälschlicherweise zu addieren!

4 Der Verinnerlichungsprozess

4.1 Ein wichtiges Anliegen des Besta-Konzepts ist die **aktive Anbahnung der Verinnerlichung.**

Basierend auf den bahnbrechenden Untersuchungen von Jean Piaget haben sich u. a. auch die Entwicklungspsychologen J. S. Brunner und H. Aebli ausführlich mit diesem Prozess befasst, der im Wesentlichen über die folgenden Stufen verläuft:
Am Anfang steht die **Handlung** mit konkreten Gegebenheiten bzw. deren unmittelbare Wahrnehmung (***„enaktive Stufe***“). In einer zweiten Phase wird die gegenständliche Handlung in **Bildern** oder zunehmend abstrakter in Form von Schemata dargestellt und

[1] Das gilt sowohl bei der horizontalen wie bei der vertikalen Schreibweise der Operation.

damit gleichzeitig auf die Zweidimensionalität reduziert („***ikonografische Stufe***“). Schliesslich folgt die „***symbolische Stufe***“, auf der die abstrakten **Zeichen an** die Stelle von Handlung und Bild treten.
Um Missverständnissen vorzubeugen, sei aber betont, dass die Zeichen – beim Rechnen also die Zahlwörter und Ziffern – bereits in enger Verbindung mit der Handlung eingeführt werden müssen. Nur so nämlich können sie sich mit der entsprechenden Bedeutung aufladen, die sie später selbstständig hervorrufen sollen.

> *„Die letzte Phase auf dem Weg der Verinnerlichung ist also nicht dadurch charakterisiert, dass hier erstmals das Zeichen aufträte, welches die Operation von nun an vertritt, sondern dadurch, dass hier das Zeichen, die Zifferngleichung, die Formel, der Satz, das erste Mal* ***alleine****, nicht mehr begleitet von der bildlichen Darstellung der Operation, erscheint. Und die Leistung des Schülers besteht hier also darin, dass er sich die konkrete Bedeutung der Operation zu vergegenwärtigen vermag, auch wenn die anschauliche Stütze gänzlich fehlt.“ (H. Aebli, 1981, S. 165)*

Die **Automatisierung** als letzte Stufe dieses Prozesses wird erst nach längerer Übungszeit erreicht. Dieses verinnerlichte Wissen und Können entlastet die kognitive Kapazität und macht Platz für weitere Lernschritte.
Eine solche Automatisierung sollte aber nicht verwechselt werden mit sinnlosen mechanisch-assoziativen Verknüpfungen, die nur gespeichert, aber nicht verstanden worden sind.

4.2 Beim Erlernen des Rechnens durchläuft der grösste Teil der Kinder diese Phasen schnell, problemlos und nahezu unmerklich.
Intellektuell behinderte oder beeinträchtigte Kinder aber haben bekanntlich grosse Mühe, den Schritt von der konkreten Handlung zur innerlichen Repräsentation zu vollziehen und kommen deshalb sehr häufig nicht – oder nicht ganz oder sehr verspätet – von den Hilfsmitteln los.
Es geht deshalb darum, die Verinnerlichung aktiv anzubahnen und diesen Weg möglichst einfach und eindeutig zu gestalten.
Das hier vorgelegte Konzept bietet dafür günstige Rahmenbedingungen: Das Besta-Handlungsmodell ist ja im Prinzip nichts anderes ist als eine Rückübersetzung des Positionssystems von der Symbolebene auf die konkrete Stufe, während die bildlich-schematische Repräsentation die Verbindung zwischen der unteren und der oberen Ebene herstellt (vgl. dazu die verschiedenen Übungen in den Modulen B und C). Der Zahlenraum und die darin sich vollziehenden Operationen sind somit von der

Handlungsebene, über die ikonografische Ebene bis hin zur Symbolebene weitgehend kompatibel.
Nur eine solch durchgehende Konstanz schafft die Voraussetzung für die Entwicklung eines festen Bezugssystems und damit für den Aufbau der Vorstellung im Sinne einer innerlichen Repräsentation.

4.3 Als Basis und Ausgangspunkt des Verinnerlichungsprozesses spielt das **Handeln** eine besonders wichtige Rolle. Die Kohärenz der dabei eingesetzten Mittel ist deshalb bereits auf dieser Stufe von entscheidender Bedeutung. Das heisst konkret: Zusätzlich zum Besta-Abakus sollte kein Handlungs- bzw. Anschauungsmodell eingesetzt werden, das ein anderes Bild über den Zahlenraum vermittelt

> Dieses Postulat kann jeder aufgrund von eigenen Alltagserfahrungen nachvollziehen. Wir alle hätten ja beispielsweise kein relativ zuverlässiges Bild von der geografischen Lage der Schweizer Städte, wenn auf den Karten die Koordinaten der Himmelsrichtungen nicht konstant wären (mancher wird vielleicht schon erlebt haben wie verwirrend nur schon die so genannten Panoramakarten sein können, bei denen die Schweizer Berge nicht im Süden, sondern im Norden liegen). Oder – um ein Beispiel aus dem Handlungsbereich anzufügen – niemand könnte das Schreiben auf einer Tastatur automatisieren wenn nicht die Anordnung der Buchstaben bei jedem Modell identisch wäre.

Bei meiner Arbeit mit den Kindern habe ich mich konsequent von solchen Überlegungen leiten lassen. Die wenigen zusätzlich zum Besta-Abakus eingesetzten Hilfsmittel lehnen sich entsprechend eng an das Grundmodell an und erfüllen in gleicher Weise die Kriterien, die ich für wichtig halte: Sie repräsentieren die Zahlstruktur unseres Zahlensystems, sind mental gut vorstellbar und leicht zu handhaben.
Für die **Finger als Hilfsmittel** trifft das zuletzt genannte Kriterium zwar nur bedingt zu, da rechenschwache Kinder wegen dyspraxischer und/oder motorischer Störungen mit dieser Manipulation manchmal Schwierigkeiten haben. Allerdings habe ich auch die Erfahrung gemacht, dass diese bei entsprechender Geduld selbst in hartnäckigen Fällen überwindbar waren. Die Arbeit mit den ***Fingermengen***[1] im Zahlenraum bis 10 – nicht zu verwechseln mit dem sprechmotorischen Weiterzählen mittels der Finger, das ich für lernbehinderte Kinder nicht befürworte, weil es den Weg zur Verinnerlichung blockiert – spielt in meinem Konzept eine wichtige Rolle, weil dies meines Erachtens zwei wesentliche Vorteile hat: Wegen ihrer spezifischen Struktur sind die Fingerschemata besonders gut einprägsam und wegen der taktil-kinästhetischen Komponente sind sie eine besonders wirksame Stütze beim Anbahnen der Vorstellung. Da sich dieses

[1] siehe dazu die Abbildungen auf dem Arbeitsblatt C 1 im Anhang zu Modul C

Hilfsmittel zudem recht diskret einsetzen lässt, gibt es den Kindern eine gewisse Sicherheit, weil sie im Zweifelsfall diesen ältesten Taschenrechner im wahrsten Sinne des Wortes stets zur Hand haben.

> Dazu noch eine Anmerkung für sprachlich Interessierte. Nach Auffassung aller Experten sind die Finger das älteste Hilfsmittel für das Zählen und Rechnen. Der im Computer-Zeitalter populär gewordenen Begriff „digital" (d.h. *in Ziffern dargestellt* bzw. *auf Zahlenkodes basierend*) geht auf das lateinische Wort *digitus* zurück, was ursprünglich *Finger* bedeutet, dann aber zum Synonym für *Zahlen* wurde. In dieser zweifachen Bedeutung wird es auch heute noch im Englischen gebraucht: *digit* kann nämlich sowohl mit *Finger* wie auch mit *Zahl* übersetzt werden, was in einem Wörterbuch noch präzisiert wurde als *Zahl unter 10*.

4.4 Ausgehend vom Handeln, entwickelt sich die Fähigkeit zur kognitiven Repräsentanz nicht nur über das Bild, sondern auch über die **Sprache (**vgl. dazu Piaget; Wygotski; Luria u. Judowitsch). Denn *Sprache* ist eine symbolische Repräsentation des *Handelns*, und *Denken* ist (zumindest teilweise) verinnerlichtes Sprechen. Diese Entwicklung vollzieht sich in einem langwierigen Prozess, der damit beginnt, dass das Kind die Möglichkeit hat, die Sprache/das Sprechen des Erwachsenen zu erleben.
Aus den skizzierten Gründen erachte ich es bei der Arbeit mit lernschwachen Kindern als besonders wichtig, ***das Handeln*** über längere Zeit ***verbal zu begleiten***.
In einer ersten Phase wird es beim Erlernen des Zählens und Rechnens meist nötig sein, dass die Lehrperson die Rolle des handelnden und sprechenden Modells übernimmt, wobei Handeln und Sprechen unbedingt synchron verlaufen müssen.
Diese Form des Lernens – auch unter den Bezeichnungen Nachahmungs- bzw. Beobachtungslernen bekannt – hat noch einen weiteren Vorteil: Die Lernenden können entspannt der ‚Vorführung' folgen und dann den Zeitpunkt selber bestimmen, wann und in welchem Ausmass sie sich in das Geschehen einbringen wollen. Dabei machte ich immer wieder die Erfahrung, dass auch die unsichersten, von einer frustrierenden Lerngeschichte gezeichneten und nur wenig motivierten Schülerinnen und Schüler im Laufe der Zeit für eine Mitarbeit gewonnen werden konnten.
Es ist mir bekannt, dass ein solcher Einsatz der Lehrpersonen aus zeitlichen Gründen normalerweise nur beschränkt möglich ist. Sehr glücklich bin ich deshalb darüber, dass nun ein Computer-Übungsprogramm[1] zum Besta-Konzept mit *Sprachausgabe* zur Verfügung steht.

[1] Herrn Jürg Studer bin ich sehr dankbar für diese sehr hilfreiche, verdienstvolle und selbstlose Arbeit.

4.5 Selbst die beste Vorbereitung bietet jedoch nicht immer Gewähr, dass die Kinder die ***Vorstellung auch tatsächlich aktivieren***. Denn für viele Kinder mit besonderen Lernbedürfnissen ist dies eine recht mühsame Angelegenheit und sie ziehen deshalb den bequemeren und sichereren konkreten Weg des Operierens auf der Handlungsebene verständlicherweise vor.

In solchen Fällen habe ich mit folgendem Vorgehen gute Erfahrung gemacht: Wenn das Kind bei der Arbeit auf einem höheren Verinnerlichungsniveau unsicher ist, Fehler macht oder nicht mehr weiter weiss – was vor allem bei Übergängen von einer zur anderen Verinnerlichungsstufe oder auch bei steigender Aufgabenschwierigkeit der Fall ist – sollte es jeweils auf das Handlungsniveau zurückgreifen dürfen. Aber: Das Kind sollte den Abakus nicht an seinen Arbeitsplatz holen, sondern es muss sich zu ihm hinbegeben und dort die Aufgabe handelnd lösen! Wenn das „Hilfsmittel" nämlich *an einem möglichst weit entfernten Ort im Klassenzimmer* deponiert ist, müssen sich die Lernenden bei der Rückkehr zum Platz dann notgedrungen darauf konzentrieren, das Bild des Lösungswegs im Kopf (!) zu behalten (!), um es anschliessend reproduzieren zu können.

In diesem Zusammenhang möchte ich ein wichtiges Prinzip der Arbeit mit dem Besta-Konzept nochmals betonen: Es geht hier nicht primär darum, den Abakus im Sinne eines Hilfsmittels zum Lösen von Rechenaufgaben (Symbolebene!) einzusetzen. Es geht vielmehr um einen anderen Weg: Ausgehend von der Erarbeitung auf der Handlungsebene geht es über verschiedene Zwischenschritte der Verinnerlichung zur Symbolebene. Nur so ist es meiner Erfahrung nach auch schwachen Schülerinnen und Schülern möglich von den Hilfsmitteln loszukommen.

D i a g n o s t i s c h e   A s p e k t e

5 Neuropsychologische Erwägungen

5. 1 Beim menschlichen Gehirn werden zwei Grosshirnhälften unterschieden, denen gemäss einer groben Einteilung unterschiedliche Funktionen der Informationsverarbeitung zugeordnet werden. Die (bei Rechtshändern) *linke Hemisphäre* ist die sprachdominante Seite. Ihr werden Eigenschaften des analytischen, logischen, abstrakten, sequenziellen und digitalen Denkens zugeschrieben. Im Gegensatz dazu wird die Informationsverarbeitung der *rechten Hirnhälfte* als bildhaft-gegenständlich, konkret, ganzheitlich, intuitiv und analog charakterisiert. Sie gilt insbesondere auch als zuständig für die ganzheitliche Erfassung visuell-räumlicher Gestalten, für die räumliche Orientierung und das Herstellen räumlicher Beziehungen. Über den *Balken* (corpus callosum) interagieren die beiden Hirnhälften in vielfältiger Art und Weise. Denn Denkprozesse, also innersprachliche Operationen, kämen ohne vorausgegangene gegenständliche Erfahrungen oder zeitlich-räumliche Vorstellungen nicht zustande. Kurz gesagt: Gegenstände, Bilder und Zeichen werden durch wechselseitige Interaktionen der Gehirnhälften zusammengebracht, wobei sie sich gegenseitig befruchten und verstärken. Dieser Prozess wird bei jeder Konzeptentwicklung in Form der Verinnerlichungsstufen wieder erneut durchlaufen.

5.2 Alles Quantitative ist visuell erfassbar und hat eine räumliche Dimension. Beim ***Erlernen des Rechnens*** spielen somit die rechtshemisphärischen Funktionen die wichtigste Rolle. Luria, der sich mit dem Rechnen, seinen Störungen und der Diagnostik aus neuropsychologischer Sicht meines Wissens wohl am intensivsten auseinandergesetzt hat, beschreibt den Weg, den der Zahlbegriff und das Erlernen der Rechenoperationen in der kindlichen Entwicklung durchlaufen:

„Die Untersuchungen . . . zeigen, dass in den ersten Entwicklungsphasen des Kindes Zahlvorstellungen und Rechenoperationen noch anschaulich-realen Charakter haben und eine Umordnung der abzuzählenden Elemente im äusseren räumlichen Feld voraussetzen; erst allmählich werden diese Operationen reduziert und durch anschaulich-bildhafte und schliesslich durch das abstrakte arithmetische Denken

abgelöst. Aber auch auf diesen Stadien enthalten Zahlvorstellungen und Rechenoperationen noch räumliche Komponenten. Man braucht nur darauf hinzuweisen, dass das Kind, selbst wenn es das Dezimalsystem bereits beherrscht, noch für lange Zeit seine Elemente in ein bestimmtes räumliches Schema einordnet, in dem jede Zahl ihren festen Platz hat." (Luria, 1970, S. 199)

5.3 ***Störungen*** rechtshemisphärischer ***Funktionen*** führen zu vielfältigen Symptomen, die auch als apraxische (bei Verlust) oder dyspraxische (angeborene oder früh erworbene) Störungen bekannt sind. Nachfolgend führe ich eine bekannte Einteilung dieser Störungen an[1]:

- Die **ideatorische Dyspraxie,** bei der die Reihenfolge einzelner Handlungselemente durcheinander gebracht wird, obwohl sie verbal richtig reproduziert werden kann;
- die **ideomotorische Dyspraxie**: Davon betroffene Kinder können intransitive (auf den eigenen Körper bezogene) Handlungen (wie beispielsweise Backen aufblasen oder beim Sitzen die Beine kreuzen, Hampelmannsprung usw.) motorisch nicht realisieren ***sofern sie <u>willkürlich</u> durchgeführt werden sollen*;**
- die **konstruktive Dyspraxie,** bei der die räumliche Formgebung bei allen gestaltenden Handlungen wie Zusammensetzen, Bauen, Basteln, Zeichen usw. misslingt.

Je nach Art und Ausprägung dieser Funktionsstörungen fallen Kinder bereits im gewöhnlichen Alltag in verschiedener Hinsicht auf:

- beim Anziehen von Kleidungsstücken (Was ist vorne und hinten, oben und unten? Wie ist die richtige Reihenfolge der Knöpfe? Welche Handlungsabfolgen sind beim Binden der Schuhe einzuhalten?),
- beim Essen (wie viel passt auf die Gabel, wie viel ins Glas?),
- beim Umgang mit Spielmaterial (wie müssen die Bauklötze gelegt werden, um eine Strasse, eine Mauer usw. zu bauen?),
- beim Gebrauch von Werkzeugen aller Art (Wie muss ich Besteck, Schere, Hammer, Bleistift usw. in die Hand nehmen und an die je unterschiedlichen Gegebenheiten anpassen?).
- Kinder mit solchen Störungen haben wenig Geschick für Bastelarbeiten sowie für Konstruktions- und Zusammensetzspiele und vermeiden solche Beschäftigungen in der Regel.

[1] vgl. auch: Breitenbach & Jaroschek, 1995

- Dass auch die Entwicklung ihrer Fähigkeit zum Abzeichnen und Zeichnen stets mehr oder weniger verzögert oder sogar schwer behindert ist, erstaunt somit nicht.
- Weniger bekannt ist hingegen, dass mit diesen Störungen häufig auch soziale Schwierigkeiten einhergehen. Weil die Kinder das Beziehungsgefüge zwischen Situationen und/oder Personen nicht richtig erfassen, verhalten sie sich häufig distanzlos, reagieren verwirrt oder geraten gar in Panik.

Diskretere Störungen dieser Art lassen sich im Vorschulalter testdiagnostisch am einfachsten nachweisen – und damit künftige Rechenschwierigkeiten recht zuverlässig prognostizieren – anhand der Leistungen im Frostig-Subtest *„Räumliche Beziehungen Herstellen“* bzw. mit ähnlichen Aufgaben, bei denen es darum geht, eine Form mittels Verbindung vorgegebener Punkte zu reproduzieren.

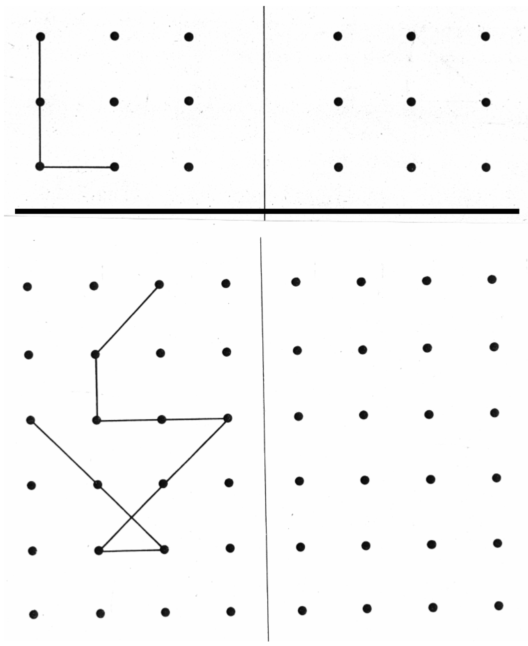


Abb. 3: **Beispiele aus dem Frostig Entwicklungstest zur Visuellen Wahrnehmung**

Zusammenfassend kann man sagen: Die hier skizzierten Schwierigkeiten beruhen im Wesentlichen auf einer ***Störung der räumlichen Synthese***, also der Fähigkeit, räumliche Beziehungen zwischen einzelnen Elementen herzustellen und sie zu einem Ganzen zusammenzufügen.

Das Ausmass dieser Schwierigkeiten lässt sich ermessen, wenn man bedenkt, dass es selbst bei normal entwickelter Synthesefähigkeit „ ... *für ein Kind im schulpflichtigen*

Alter sehr schwer ist, sein durch eine Reihe von Einzelerfahrungen erworbenes Wissen über räumliche Anordnungen zu einem einzigen, strukturierten Ganzen zu kombinieren.“ (Gardner, 1991, S.169)

So wird verständlich, warum lernbeeinträchtigte Kinder grosse Mühe haben, ausgehend von den einzelnen Zahlelementen aus eigener Kraft einen zusammenhängenden Zahlenraum aufzubauen.

Dem in der Heilpädagogik verbreiteten Lösungsansatz, die ungenügend entwickelten Funktionsbereiche vor dem Erlernen der Kulturtechniken durch eine gründliche Basisförderung auf das erforderliche Niveau zu bringen, stehe ich skeptisch gegenüber. Vor allem möchte ich dafür plädieren, diese Vorbereitungsphase nicht allzu sehr auszudehnen. Denn ich habe wiederholt die Erfahrung gemacht: Einerseits lassen sich schwere Funktionsstörungen nicht innerhalb nützlicher Frist im gewünschten Ausmass verbessern, und andererseits können die bestehenden Schwächen mittels geeigneter methodischer Massnahmen ein gutes Stück weit kompensiert werden.

Auf die Frage wie sich die visuell-räumlichen Störungen, die der primären Rechenschwäche zu Grunde liegen, kompensieren lassen, fand ich bei *Wais & Köster-Wais* (1984) eine überzeugende Antwort:

*„Wenn wir mit dem Patienten das bei der rechtshemisphärischen Hirnschädigung typischerweise gestörte Teil-Ganzes-Verhältnis erarbeiten wollen, sollten wir nicht von den Teilen ausgehen, sondern vom Ganzen. Wenn wir von den Teilen ausgehen und der Patient ein Ganzes daraus konstruieren soll, so setzen wir ja die räumlichen Fähigkeiten voraus, die wir trainieren wollen. Wenn wir dagegen **vom Ganzen ausgehen** und es zusammen mit dem Patienten in seine Einzelheiten schrittweise zergliedern, so setzen wir an seiner durchaus intakten Wahrnehmung des Ganzen an.“*

(op. cit. S. 20 f)

Diese Anregung war ein weiterer Meilenstein hin zu der Idee, den lernbehinderten Schülerinnen und Schülern den Zahlenraum bis 100 **als Ganzes** in Form eines positionalen Handlungsmodells **vorzugeben**, um von dieser Basis aus die zwischen den Zahlen bestehenden Zahlbeziehungen zu erarbeiten.

5.4 Auswirkungen der visuell-räumlichen Störung machen sich im Laufe des Lernprozesses auch anderweitig bemerkbar: Die Kinder haben Mühe, Ziffern zu behalten, vor allem aber sie zu schreiben, weil dies besonders hohe Anforderungen an die Fähigkeit zur Formreproduktion stellt.

Wer Erfahrungen mit Schulanfängern hat weiss, welche Schwierigkeit auch die visuelle Unterscheidung der Ziffern 6 und 9, manchmal auch 2 und 5, sowie 1 und 7 bereiten kann; und auch das Verdrehen zweistelliger Zahlen ist teilweise auf eine solche Raumlage-Unsicherheit zurückzuführen.

Weil Rechnen mit Regeln und Zeichen – speziell auch mit *sprachlichen* Zeichen – zu tun hat, spielen bei der Aneignung dieses Lerninhalts nicht zuletzt auch linkshemisphärische Funktionen eine wichtige Rolle[1]. Wenn Kinder also zusätzlich unter Störungen der Sprache und/oder dem Verständnis von Rechenregeln leiden, ist der Lernprozess in mehrfacher Hinsicht beeinträchtigt.

5.5 Das folgende Schema zeigt die Zusammenhänge auf zwischen *Menge*, *Zahlwort* und *Ziffer* unter den Aspekten der ***Kommunikationsprozesse*** und der ***Sinnesmodalitäten***. Dieses Wissen trägt dazu bei, sich spezifische Schwierigkeiten der Lernenden bewusst zu mache, um sie entsprechend berücksichtigen zu können.

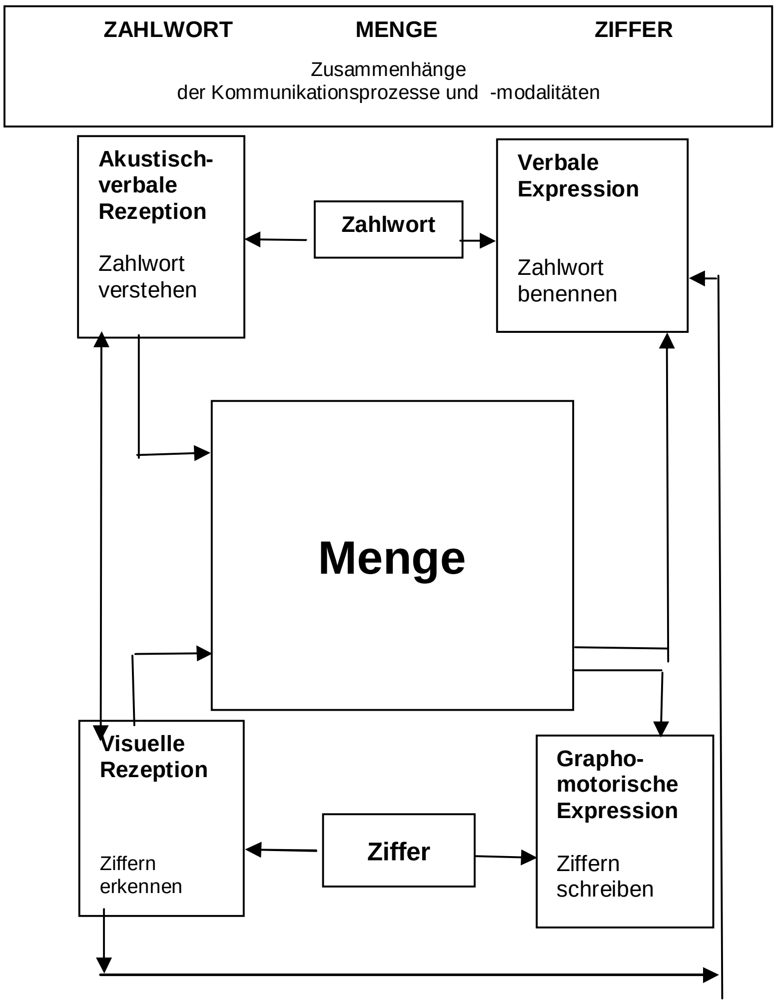


Abb. 4: Zusammenhänge zwischen Menge – Zahlwort – Ziffer

---

[1] Eine neuere Untersuchung deutet darauf hin, dass die Muttersprache mitbestimmt, von welchen Hirnarealen Rechenaufgaben übernommen werden. So arbeiteten bei Chinesen die visuell-räumlichen Zentren beim Umgang mit Ziffern besonders stark, während sich Englischsprachige mit der Aktivierung der Sprechzentren begnügten. (Gerritzen, 2008, S. 81)

Die **Mengen** sind Ausgangspunkt und Zentrum dessen, womit Zählen und Rechnen wesentlich zu tun haben. Sie sind primär im visuellen Bereich angesiedelt. Die Zahlwörter und Ziffern sind Kodierungen für die Mengen. Dabei kommen unterschiedliche Funktionsbereiche zum Einsatz: Einerseits die **verbal-akustische (Zahlwörter)** und andererseits die **visuomotorische Modalität (Ziffern).**
Zusätzlich sind bei den Modalitäten auch die unterschiedlichen Kommunikationsprozesse zu berücksichtigen: **Rezeption** im Sinne des akustischen Verstehens oder des visuellen Wiedererkennens sowie **Expression** im Sinne der verbalen, gestischen oder grafomotorischen Wiedergabe.

Welche der genannten Prozesse und Modalitäten zum Einsatz kommen, hängt von der Art der Fragestellung ab.
Die relativ einfache Aufgabe *„gib mir (bzw. zeige mir) 2 Äpfel“* setzt das Verstehen des Zahlwortes und das visuelle simultane Mengenerfassen voraus. Wenn hingegen die Menge umfangreicher ist – *„gib mir 9 Äpfel“* – kommt beim Abzählen die Zahlwortreihe zum Einsatz.
Komplizierter wird es bei der Frage *„wie viel ist das?*“ Jetzt stehen mehrere Möglichkeiten zur Verfügung: Wenn vom Kind verlangt wird das Zahlwort zu benennen, dann setzt das nicht nur voraus, dass das sprachliche Symbol gut gespeichert, sondern auch innerhalb nützlicher Frist abrufbar ist; mit anderen Worten: Das Kind sollte weder an Störungen der akustischen Merkfähigkeit noch unter Wortfindungsstörungen leiden.
Andererseits besteht als Antwort auf diese Frage auch die Möglichkeit, auf das Kodierungssystem zweiter Ordnung zurückzugreifen: Dann muss das Kind die entsprechende Ziffer entweder in einer vorgegebenen Auswahl lediglich wiedererkennen (Rezeption) oder aber die Ziffer aufschreiben (Expression). Die zuletzt genannte Variante, die im Unterricht wohl am häufigsten vorkommt, stellt aber – wie bereits erwähnt – für Kinder mit ausgeprägten dyspraktischen Störungen oft die grösste Anforderung dar, und zwar besonders dann, wenn sie aus dem Gedächtnis erfolgen muss.
Noch komplizierter wird es schliesslich, wenn die konkrete Menge in den Hintergrund tritt und nur noch auf der Symbolebene der beiden Kodierungen kommuniziert wird. Wenn das Kind beispielsweise bei der Aufforderung *„schreibe 6“* versagt, oder die Frage *„wie heisst diese Zahl*“ nicht korrekt mit „sechs“ beantworten kann, so fällt es nicht immer leicht zu entscheiden bei welchem Prozess und/oder welcher Modalität das

Hauptproblem liegt, zumal gelegentlich auch das Auseinanderhalten der Zahlwörter Schwierigkeiten bereitet.

5.6 Um die Schwierigkeiten der Kinder beim korrekten Verbalisieren zu verstehen, halte ich es für wichtig, sich besonders auch die Stolpersteine rund um die deutschen Zahlwörter bewusst zu machen.

Während es sich bei den Zahlwörtern ***eins*** bis ***zwölf*** [1] um sprachlich zunächst „neutrale" Kodierungen handelt, lässt sich im zweiten Zehner ab d*reizehn* bis *neunzehn* ein sinnvoller Zusammenhang mit der entsprechenden Menge herstellen.

Den zwei*stelligen* Zahlen 13 bis 19 entsprechen zwei*silbige* Zahlwörter (*dreizehn* bis *neunzehn*), während es sich bei den ebenfalls zweistelligen Zahlen 11 und 12 um einsilbige Wörter handelt.

Bei den vollen Zehnern fällt die Zahl ***zwan****zig* teilweise aus dem Rahmen, wobei der Zusammenhang mit „zwei" keineswegs auf der Hand liegt. Nach einer weiteren kleinen Unregelmässigkeit (*drei**ssig***) geht es dann nach dem gleichen Muster von *vier**zig** bis neun**zig*** weiter – abgesehen von ***sieb****zig*, wo wie bei ***sieb****zehn* zusätzlich die Grundzahl (*sieben)* verkürzt ist.

Wenig hilfreich ist es auch, dass die Zehner-Stelle lediglich durch die Silbe *„zig"* [2] symbolisiert wird, während dann in der 3. und 4. Stelle die Verhältnisse klar sind, weil nun das Zahlwort mit der Stellenbezeichnung gekoppelt ist.

Es erstaunt deshalb nicht, dass manche Kinder während einer gewissen Zeit auch Schwierigkeiten mit der Unterscheidung zwischen z. B. *fünf**zehn*** und *fünf**zig*** haben.

Bei den zweistelligen Zahlen gibt es schliesslich noch den Unterschied einerseits zwischen den zweisilbigen Zahlen *dreizehn* bis *neunzehn* und andererseits den folgenden dreisilbigen Zahlwörtern, die bereits eine Rechnung enthalten (z. B. *ein**und**zwanzig).*

Bei den *vollen* Zehnern beginnt das Zahlwort beim Zehner (z. B. ***vier****zig)*, stimmt also mit dem Bild und der Schreibrichtung der Ziffern überein. Bei den zweistelligen gemischten Zahlen (z. B. *75*) ergibt sich ein oft beklagtes und nicht zu unterschätzendes Problem: Nicht nur beginnt das *Zahlwort* jetzt beim Einer (***fünf****undsiebzig*), sondern die Zahlensprechweise stimmt nicht mit der Schreibrichtung der Ziffernfolge überein! Wie

[1] Nach Kluge (1989, S. 174) handelt es sich bei *elf* und *zwölf* um das Relikt eines Kontrastes zwischen einem Zehner- und einem Zwölfersystem. Dem widerspricht Ineichen (1982, S. 23) mit der Erklärung: „Sie entstanden aus ein-lif = eins über 10 und zwo-lif = zwei über 10."

[2] Die Silbe „zig" ist vermutlich eine sprachliche Abschleifung von „zehn".

verwirrend das ist zeigt das Beispiel: Man sagt *„fünf“* und schreibt die Ziffer 7; dann schreibt man die Ziffer 5 und sagt *„und siebzig“*.[1]

Erst beim dritten Stellenwert wird der Zusammenhang zwischen Zahlwort und Zahlenraum völlig transparent, da nun die Position selbst unzweideutig bezeichnet wird (z. B. *„fünf**hundert**“*). Bei *gemischten dreistelligen* Zahlen entsteht jedoch beim Verbalisieren eine weitere Schwierigkeit durch den zusätzlichen Richtungswechsel: Beginn beim Hunderten, dann folgt Einer und zuletzt Zehner (z. B. „568“ = *fünfhundertachtundsechzig“*).
Der Vollständigkeit halber sei noch meine Erfahrung erwähnt, dass verhältnismässig viele Kinder Mühe haben mit den so genannten „Schnapszahlen“ (z. B. 44 oder 88).

6 Vorerfahrungen im Zahlenbereich

6.1 In seinem Werk über die *„Entwicklung des Zahlenbegriffs beim Kinde*“ hat sich Piaget sehr ausführlich mit der Entwicklung der konkreten Operationen *Klassifikation, Seriation* und *Konservierung (Invarianz)* auseinandergesetzt und aufgezeigt, wie sich in diesem Zusammenhang um das 7. Lebensjahr herum der Zahlbegriff beim Kind entwickelt. In der Folge wurde die Förderung des operatorischen Denkens zur unerlässlichen Voraussetzung des Elementarunterrichts im Rechnen. Dabei ging man von der Annahme aus, das Kind könne nur auf diese Weise Zugang zur Welt der Zahlen bzw. zur Verknüpfung von numerischen Quantitäten finden. Und oft war damit – mehr oder weniger reflektiert – auch die Auffassung verbunden, auf dieser Basis stelle sich das Erlernen des Rechnens quasi wie von selbst ein.
Verhängnisvoll wirkte sich dieses Missverständnis vor allem im heilpädagogischen Bereich aus, weil mit den pränumerischen Übungen sehr viel kostbare Zeit verloren ging, und die Kinder oft mehr verwirrt als befähigt wurden.
Da sich mittlerweile die Forschungslage in dieser Frage grundlegend gewandelt hat (vgl. u. a. Dehaene, 1999; Moser Opitz, 2001), können solche Übungen – die vermutlich in der heilpädagogischen Praxis immer noch recht verbreitet sind – getrost relativiert werden.

[1] Mittlerweile gibt es einen Verein, der sich für eine unverdrehte Zahlensprechweise einsetzt (zwanzigeins@rub.de), vgl. Gerritzen, 2008

6.2 Für den Beginn des Rechenunterrichts mit dem Besta- Konzept genügt es, wenn die Kinder folgende Vorerfahrungen im Zählbereich mitbringen:

- Sie kennen das Prinzip der Quantität, d. h. sie wissen, dass man alle möglichen unbelebten und belebten Elemente unabhängig von ihrer qualitativen Beschaffenheit zählen kann.
- Sie können (zumindest kleine) Mengen abzählen, indem jedem der zu zählenden Gegenstände ein Zahlwort zugeordnet wird.
  Die Umsetzung dieses Wissens kann jedoch beim Abzählen unter gewissen Umständen – vor allem wenn die Dinge zu klein sind oder zu nahe beieinanderliegen – scheitern, weil relativ viele kognitiv beeinträchtigte Kinder aus neuropsychologischen Gründen (mangelhaftes Zusammenspiel der beiden Hirnhälften) Schwierigkeit mit dem präzisen Koordinieren der verbalen und der visuomotorischen Modalität haben. Diese Integrationsschwäche wird am besten dadurch kompensiert, dass die Lernenden jeden Gegenstand in die Hand nehmen und ihn an einem anderen Ort deponieren (wie z. B. beim Zählvorgang am Besta-Abakus). Dabei kann es in einigen Fällen hilfreich sein, dem Kind eine Zeit lang die Hand zu führen und das Sprechen der Zahlwörter begleitend zu unterstützen.
- Die den Kindern bereits geläufige Abfolge der Zahlwörter wird stets in der gleichen Reihenfolge genannt; d. h. sie wissen, dass die Reihe der Zahlnamen eine feste Ordnung hat.
- Und sie haben verstanden, dass jeweils das zuletzt genannte Zahlwort den Umfang der gesamten abgezählten Menge repräsentiert.
  Wenn Kinder dieses Prinzip noch nicht verstanden haben, beginnen sie auf die Frage *wie viel Perlen sind es also?* stets wieder erneut zu zählen.

6.3 Aber auch wenn die eine oder andere dieser Voraussetzungen fehlt, ist es keineswegs ausgeschlossen, mit einem Kind in den Lernprozess des Zählens einzutreten. Ich habe sogar wiederholt erfolgreich mit einem Kind gearbeitet, das alle diese Voraussetzungen nicht mitbrachte, wobei die Gründe dafür sehr unterschiedlich sein können.

Ich denke dabei beispielsweise an einen Knaben, der ein völlig falsches Konzept entwickelt und eine Zeit lang hartnäckig daran festgehalten hatte. Ausgehend von der umgangssprachlichen Gleichsetzung von Ziffer und Zahl bzw. von Zahlen und Rechnen glaubte der Knabe genug zu verstehen, wenn er die Ziffern von Auto- oder Telefonnummern in digitaler Art (also jede Zahl einzeln) benennen konnte. Kevin hatte also nur den so genannten Codierungsaspekt der Zahlen zur Kenntnis genommen, bei dem der zentrale Aspekt der Menge nicht ersichtlich ist.
Obwohl der Knabe an multiplen dyspraktischen Störungen mit erheblichen Auswirkungen auf seine Persönlichkeit und sein Verhalten litt, und überdies hinsichtlich Motivation, Ausdauer und Konzentration eine miserable Arbeitshaltung hatte, konnte er mit Hilfe des Besta-Konzepts im Laufe

der Zeit beachtliche Fortschritte machen. Bei einem wöchentlichen Aufwand von 1 bis 2 Doppellektionen – in denen die psychotherapeutische Arbeit einen breiten Raum einnahm und überdies auch das Lesen angebahnt wurde – hat K. nach rund 6 Jahren meiner Arbeit mit ihm (am Rechenunterricht in der Klasse nahm er über längere Zeit nicht teil) folgende Ziele erreicht: Er kann im vierstelligen Zahlenraum vorgegebene Geldmengen fortlaufend summieren und umgekehrt auch Preisen das entsprechende Geld auf verschiedene Art zuordnen – nota bene ohne Hilfsmittel.[1]

7 Lernprotokolle

7.1 Bei jedem Lernprozess spielen zwei Dimensionen eine wichtige Rolle: zum Einen die **Komplexität der Inhalte**, bei der es um das Fortschreiten zu immer komplexeren Leistungen, also um die Abstufung der Schwierigkeit von Lerninhalten geht; zum Anderen das **Niveau der Verinnerlichung** (vgl. Kapitel 4), mit dem die Inhalte bewältigt werden.
Kutzer (1983, S.14) hat diese beiden Dimensionen in Form eines Lernstrukturgitters dargestellt.

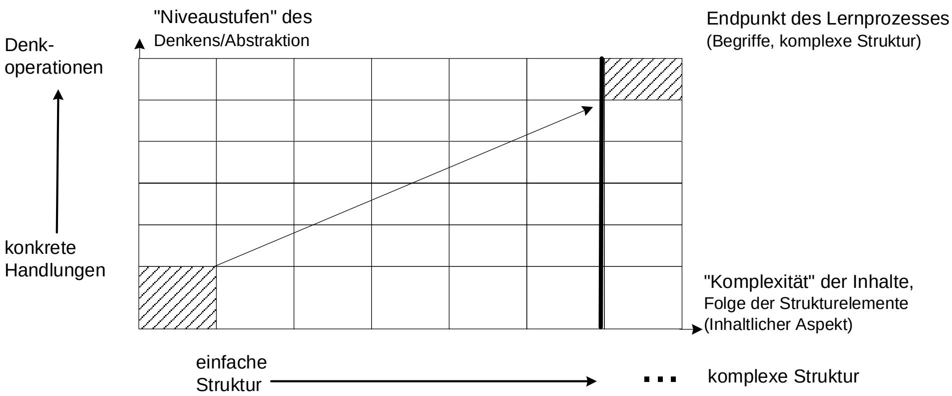


Abb. 5: **Lernstrukturgitter**

Dieses Schema liegt den **Lernprotokollen** zu Grunde, die ich zur Begleitung der Lernprozesse erstellt habe.

Die folgenden Darstellungen geben einen Überblick über die beiden Besta-Lernprogramme:

[1] Dokumentiert ist dies in einem Film, in dem einige Lernschritte des Besta-Konzepts festgehalten sind. Der Film befindet sich ebenfalls auf dieser Homepage.

Lernprotokoll B I
Rechnen mit Geld (Programmübersicht)

Verbale Ebene								
Ebene neutrale Unterlage								
Ebene Struktur-schema								
Ebene Handlungs-modell								
	Rekonstruk-tion Handlungs-modell	Zählen, Mengen, Ziffern	Geldwerte	ohne Bündelung	mit Bündelung	ohne Bündelung	mit Bündelung	Rück-gabe-geld
				vom Geld zur Summe		von der Summe zum Geld		

Abb. 6: **Modul B**

Lernprotokoll C I
Zählen und Rechnen gemäss Positionssystem (Programmübersicht)

Symbol			
Bild			
Handlung			
	Erarbeitung des Positionssystems	Addieren	Subtrahieren

Abb. 7: **Modul C**

Im Einleitungskapitel zu den Programmen (Module B und C) gehe ich auf die Inhalte der beiden Dimensionen näher ein. Das konkrete Vorgehen ist bei den einzelnen

Lernschritten jeweils beschrieben und teilweise anhand von Fotos und anderen Abbildungen dokumentiert.

7.2 Anhand der Lernprotokolle kann der **individuelle Verlauf** dieses zweidimensionalen Lernprozesses festgehalten werden. Es liegt im Ermessen der Lehrperson, innerhalb dieses Koordinatensystems den Weg zu wählen, der den Schülerinnen und Schülern in kognitiver und motivationaler Hinsicht jeweils am besten entspricht. Sei es, dass im einen Fall die Aufgaben bald einmal komplexer werden, oder sei es, dass im anderen Fall die Stufen der Abstraktion (Niveau) schneller bewältigt werden sollen oder wollen. Denn es kann für den einen Schüler unter Umständen sinnvoller sein, momentan die Schwierigkeit der Aufgaben auf Kosten des Niveaus zu steigern, während es für eine bestimmte Schülerin vielleicht motivierender ist, einfachere Aufgaben bereits ohne Hilfsmittel lösen zu können.
Es empfiehlt sich jedoch nicht, zuerst sämtliche Komplexitätsgrade zu erarbeiten und erst danach die Verinnerlichung anzustreben. Die Ablösung von der Handlungsebene würde dadurch erschwert oder gar verunmöglicht. Bei meiner Arbeit mit den Kindern habe ich bevorzugt für jede Komplexitätsstufe die Niveaustufen eingeübt – und dieses Vorgehen hat sich in der Regel bewährt.

Die von den Lernenden beim Einstieg in das Programm mitgebrachten Kompetenzen wie auch ihre unterschiedliche Lernfähigkeit und Lerngeschwindigkeit sind bei der Durchführung des Programms selbstverständlich zu berücksichtigen. Anders gesagt: Es müssen nicht alle Kinder, Jugendliche oder Erwachsene alle beschriebenen Lernphasen in gleicher Ausführlichkeit durchlaufen. Mit den in diesem Konzept vorgeschlagenen Abstufungen habe ich mich vor allem an den Bedürfnissen von Menschen mit ausgeprägten intellektuellen Beeinträchtigungen orientiert.

Bei der Durchführung des Programms haben sich auch folgende Grundsätze bewährt: Immer wenn die Lernenden eine Aufgabe nicht auf einem höheren Niveau zu lösen vermögen – und das wird häufig dann wieder aktuell, wenn eine neue Komplexitätsstufe in Angriff genommen wird – muss vorübergehend auf ein niedrigeres Niveau zurückgegriffen werden. Es ist aber auch die umgekehrte Möglichkeit im Auge zu behalten: Das Verharren auf einer Niveau- oder Komplexitätsstufe sollte nicht länger als nötig ausgedehnt werden.

Das Ziel ist erreicht, wenn die Lernenden sowohl Aufgaben auf der höchsten Stufe der Denkhandlungen wie auch auf derjenigen der Komplexität des Inhalts bewältigen können.

7.3 Für die Begleitung der Lernprozesse stehen für die Module B (10) und C (13) Lernprotokolle zur Verfügung, die den Lehrpersonen jeweils auch einen raschen Überblick über das zu erarbeitende Programm bzw. seiner einzelnen Teile vermitteln. Gute Erfahrungen habe ich damit gemacht, auch die Lernenden – vor allem Jugendliche und Erwachsene – so weit das möglich ist anhand der Protokolle über den anstehenden Lernprozess und die zu absolvierenden Schritte auf den beiden Dimensionen zu informieren. Das zeigt ihnen, wohin die Reise geht, welche Wege und Mittel zum Bestimmungsort führen und wo sie selbst zum gegebenen Zeitpunkt stehen.

> Dies erwies sich beispielsweise als hilfreich, als einmal ein Jugendlicher sich zu Beginn meiner Arbeit mit ihm empört weigerte, mit dem Abakus zu arbeiten, *„weil ich ja schliesslich die Bretter nicht mit ins Geschäft nehmen kann*“.
>
> Besonders wichtig sind solche Informationen unter Umständen auch für erwachsene Menschen, die im Laufe ihrer Schulzeit bereits ausgiebig – aber oft wenig erfolgreich – mit verschiedenen Hilfsmitteln gearbeitet haben.

Der individuelle Weg der Lernenden wird nachvollziehbar, wenn im Schnittfeld der Koordinaten jeweils spezielle Informationen notiert werden:
Wichtig ist das Datum, an dem eine Lerneinheit (horizontale Dimension) begonnen, auf ein höheres Niveau (vertikale Dimension) umgestellt und ein Lernziel erreicht wird. Empfehlenswert ist es aber auch, in regelmässigen Abständen den jeweiligen Standort zu markieren, wobei stichwortartig überdies besondere Schwierigkeiten oder Fähigkeiten festgehalten werden können. Solche Informationen liefern wichtige Hinweise auf das Lerntempo und damit auch auf die Lernfähigkeit.
Wenn auf diese Weise der Lernprozess dokumentiert wird, so ergibt sich ein einigermassen objektives Bild vom Verlauf des Lernprozesses, der mit Höhen und Tiefen nicht immer so gradlinig verläuft, wie man es sich eigentlich wünschen würde.

Anwendungsaspekte

8 Die Zielgruppen

8.1 Die primäre Zielgruppe des Besta-Konzepts sind **intellektuell beeinträchtigte Menschen,** wobei die Lernschwierigkeiten hinsichtlich Art und Schweregrad erheblich variieren können.

Die ***untere Grenze*** liegt im Grenzbereich zwischen basaler *Schulbildungsfähigkeit* einerseits und *praktischer Bildbarkeit* andererseits. Testdiagnostisch entspricht das in etwa dem IQ 50. Dieser Wert ist gemäss Internationaler Übereinkunft die untere Grenze der Kategorie „*leichte Intelligenzminderung*", die sich über den IQ-Bereich 50-69 erstreckt und einem mentalen Alter von 9 bis unter 12 Jahren entspricht (vgl. ICD-10 F70).

Ergebnisse von Intelligenztests sollten meines Erachtens jedoch nicht das einzige und nicht einmal das wichtigste Kriterium für Schulbildungsfähigkeit sein, da sie aus verschiedenen Gründen oft ein ungenaues oder sogar falsches Bild vermitteln. Eine besonders wichtige Rolle spielt dabei die Wahl des Intelligenztests. Je nach Instrumentarium werden nämlich sehr unterschiedliche Fähigkeitsbereiche erfasst, die von Menschen mit spezifischen Funktionsstörungen mehr oder weniger gut gelöst werden können.

Es hat sich zwar mittlerweile herumgesprochen, dass die kognitiven Fähigkeiten sprachbehinderter Kinder nicht mit verbalen Intelligenztests überprüfbar sind. In Bezug auf dyspraxische Kinder mit räumlichen Störungen – und allem, was damit zusammenhängt – wird aber eine entsprechende Erkenntnis leider noch weitgehend ignoriert.

Wiederholt habe ich die Erfahrung gemacht, dass sich selbst bei einem relativ niedrigen IQ-Niveau und ausgeprägten neuropsychologischen Störungen der Versuch lohnt, auch den schwer lernbehinderten Menschen den Zugang zu den Kulturtechniken zu ermöglichen. Voraussetzung ist jedoch, dass eingefahrene methodische Wege verlassen und die Defizite *mit geeigneten Methoden* zumindest ein Stück weit ausgeglichen

werden. Dabei sind die Erfolgsaussichten natürlich umso grösser, je früher mit den Kindern kompensatorisch gearbeitet wird.
In diesem Sinne ist das Programm *Rechnen mit Geld* (Modul B) speziell konzipiert als Bildungsangebot für schwer lernbehinderte Kinder, Jugendliche und Erwachsene in Schulen, Werkstätten, Wohnschulen, Bildungsklubs usw., deren Selbstständigkeit eingeschränkt ist, weil sie die rechnerischen Voraussetzungen für den Umgang mit Geld nicht erlernen konnten. Und weil für diese Zielgruppen das Rechnen mit Geld das wichtigste und meist einzigste Anwendungsgebiet des Rechnens ist, bildet dieses Programm den Schwerpunkt des Besta-Konzepts.

8.2 Eine ***obere Grenze*** für den Einsatz des Besta-Konzepts gibt es im Prinzip nicht. Auch normal begabte Kinder – und unter ihnen vor allem Mädchen[1] – können von den skizzierten Teilleistungsstörungen und damit einhergehenden Rechenstörungen betroffen sein. Dass sich dies vor allem in den ersten Schuljahren auswirkt, hängt m.E. wesentlich mit dem bevorzugten Anschauungsmodell (Hundertertafel, vgl. Abb. 1) sowie den grösseren Anforderungen der algebraischen Methode zusammen. Diesen Kindern könnten viele Probleme und Sorgen – angefangen von schlechten Noten bis hin zu Klassenwiederholungen und manchmal gar Überweisung in eine Kleinklasse – erspart werden, wenn sie frühzeitig in das Positionssystem und den damit einhergehenden algorithmischen Rechenmodus eingeführt würden.
Und schliesslich können Aspekte dieses Konzepts auch bei der Einführung des sogen. ‚schriftlichen Rechnens' in der Regelschule hilfreich sein.[2]

8.3 In Kursen und Workshops höre ich von Lehrpersonen öfter den Einwand, das Besta-Konzept sei zwar interessant, aber zu alternativ – man müsse sich halt an die Lehrpläne bzw. an die damit einhergehenden Lehrbücher halten.
Dem halte ich folgende Argumente entgegen:
Angesichts des zunehmenden Trends zur integrativen Schulform drängt sich meines Erachtens ohnehin eine grössere methodische Variabilität und Flexibilität in den Regelklassen auf. Es ist meines Erachtens unumgänglich, dass beim gemeinsamen Lernen von kognitiv beeinträchtigten, normal begabten und (immer zahlreicher

[1] Vor einiger Zeit wurden einmal mehr Forschungsergebnisse zur These veröffentlicht, dass die Begabung für das räumliche Denken bei Mädchen durchschnittlich weniger gut ausgeprägt ist als bei Knaben. (Hausmann, 2003).
[2] Kürzlich berichtete mir eine Lehrerin, dass ein normal begabter Knabe immer wieder das Vorgehen beim schriftlichen Rechnen vergass, vor allem Mühe hatte mit dem Satz *„schreibe ... behalte 1"*. Sie erinnerte sich dann an die Besta-Stellenbretter, und nachdem der Knabe das Vorgehen einige wenige Male handelnd durchgeführt hatte, war das Problem endgültig beseitigt.

werdenden) hoch begabten Kindern auch ihre je besonderen Lernbedürfnisse angemessen berücksichtigt werden. Am Grundsatz aller schulischen Leitbilder „***Das Kind*** *steht im Mittelpunkt*“ sollten meines Erachtens auch die offiziellen Lehrpläne/Lehrbücher gemessen und gegebenenfalls relativiert werden dürfen.
Überdies: Es trifft zwar zu, dass das Besta-Konzept in gewisser Weise alternativ ist. Andererseits aber ist sein zentraler Aspekt – die Anwendung des Stellenwertprinzips mit dem entsprechenden algorithmischen Rechenverfahren – ein Lerninhalt, der im Laufe der regulären Grundschuljahre ebenfalls zum vorgeschriebenen Lernstoff gehört.
Ich bin deshalb davon überzeugt, dass die Arbeit mit dem Besta-Konzept beim gemeinsamen Lernen von normal begabten und intellektuell beeinträchtigten Kindern eine zusätzlich integrierende Wirkung haben kann, weil mit diesem Ansatz die oft grossen Leistungsunterschiede zwischen lernschwachen und lernstarken Kindern weniger krass ins Auge fallen.

8.4 Das Besta-Konzept eignet sich sowohl für die ***Arbeit mit einer Klasse*** wie auch für die ***individuelle Förderung*** durch einen Stützlehrer oder eine Therapeutin. Letzteres ist allerdings nur sinnvoll, wenn diese Arbeit von der in der Klasse unterrichtenden Lehrperson mitgetragen wird. Denn Kindern, die ohnehin mit dem Erlernen des Rechnens bereits Mühe haben, sollte man aus verständlichen Gründen nicht zumuten, gleichzeitig auf zwei verschiedenen Strassen unterwegs sein zu müssen! Es lohnt sich, diesbezüglich Überzeugungsarbeit zu leisten, in die auch die Eltern einbezogen werden müssen.

9 Ausblick auf die Programme

9.1 Die beiden Lernprogramme des Besta-Konzepts verstehen sich als **Rahmenprogramme**. Das heisst: Im Hinblick auf die definierten Lernziele[1] werden die wichtigsten methodischen Schritte aufgezeigt, die sich bei meiner bisherigen Arbeit mit relativ stark lernbehinderten Kindern und Jugendlichen bewährt haben. Es wird also

[1] Die Lernziele sind in den Einleitungskapiteln der jeweiligen Module näher umschrieben.

nicht der Anspruch erhoben, es seien alle Aspekte des jeweiligen Lernprozesses erfasst oder es würden Lösungen für alle erdenklichen Probleme der Lernenden aufgezeigt.
Die Programme konzentrieren sich auf die wesentlichen Aspekte und Elemente und gestalten den Lernprozess so einfach wie möglich.

Die Lernschritte, die im Prinzip zunehmend komplexer werden, bauen aufeinander auf, und sollten deshalb bei der Arbeit mit der primären Zielgruppe im Grossen und Ganzen eingehalten werden.
Angesichts der – nach Art und Ausmass – sehr unterschiedlichen Schwierigkeiten betroffener Menschen, die in vielen Fällen überdies eine je andersartige Lerngeschichte hinter sich haben, kann es aber auch sinnvoll sein, den Weg zu verkürzen oder zu erstrecken, zusätzliche Übungen durchzuführen, andere auszuklammern.

9.2 Sie werden bemerken, dass die **didaktischen Umsetzungen** relativ eintönig sind, und die thematischen Einkleidungen sogar völlig fehlen.
Dies hat einerseits damit zu tun, dass die Zielgruppen dieses Konzepts hinsichtlich Alter und Behinderungen sehr unterschiedlich sind.
Andererseits entspricht diese Kargheit meiner Erfahrung, dass vor allem Menschen mit kognitiven Beeinträchtigungen durch die bunten Verpackungen einer auf Themen bezogenen und an Erlebnissen orientierten Didaktik oftmals der Blick auf das Wesentliche des Lernprozesses verstellt wird, sodass sie eher verwirrt als motiviert und befähigt werden. Das Programm hält sich vielmehr an den Grundsatz: Lernen geschieht umso leichter, je klarer und einfacher der Lernstoff strukturiert ist – ein Prinzip, das in der Computerbranche als Benutzerfreundlichkeit geschätzt ist.
Dieses Prinzip bestimmt auch die Gestaltung des **Computer-Übungsprogramms** sowie der **Arbeits- und Übungsblätter,** die den Modulen B und C beigefügt sind. Die Lernenden sollen möglichst wenig Hilfe beim Zurechtfinden und Problemlösen benötigen, also weitgehend selbstständig arbeiten können. Das entlastet die Lehrpersonen und gibt den Lernenden Sicherheit und Selbstvertrauen.
Im Übrigen ist es natürlich jeder Lehrperson überlassen, ihre methodisch-didaktische Kreativität einzubringen. Ich möchte aber empfehlen, diese Beiträge jeweils darauf zu überprüfen, ob sie mit dem hier vorgestellten Konzept kompatibel sind.

9.3 Die Programme des Besta-Konzepts geben den Lernenden nicht nur den Zahlenraum und den Rechenmodus vor, sondern auch die Strategien wie sie in diesem Rahmen handeln, sprechen und denken sollen. Der Vorteil besteht darin, dass Lehrende und Lernende damit den gleichen Bezugsrahmen haben. Dies wiederum erleichtert die gegenseitige Kommunikation und gibt den Lehrpersonen die Möglichkeit, jederzeit steuernd in den Lernvorgang einzugreifen.

Kritiker mögen gegen ein derart durchstrukturiertes Programm einwenden, den Lernenden werde dadurch die Möglichkeit zur Entwicklung eigenständigen Entdeckens und Denkens vorenthalten.[1]

Das seit einiger Zeit favorisierte Postulat des *„aktiv-entdeckenden Lernens"* bzw. des *„Lernens auf eigenen Wegen"* (Moser Opitz, E. und Schmassman, M., 2002) ist meiner Erfahrung nach bei Menschen mit schwerwiegenden Lernproblemen mehrheitlich unrealistisch. Ihre Fähigkeit, den Lernstoff selber zu strukturieren, ist zumindest erheblich eingeschränkt. Und wenn sie gewisse praktikable Teilstrategien entwickeln, so führen diese nicht selten in Sackgassen, weil der Gesamtzusammenhang aus eigener Denkkraft nicht hergestellt werden kann.

Das Anliegen des Besta-Konzepts ist es, das Wissen und Können einer **Kulturtechnik** durch direkte Anleitung und enge Begleitung möglichst effizient, praxisorientiert und benutzerfreundlich zu vermitteln. Kulturtechniken aber lernt man meiner Erfahrung nach nicht durch Versuch und Irrtum, sondern nur mit direkter Anleitung. In dieser Hinsicht entspricht das Konzept durchaus aktuellen Forschungsergebnissen, wie in den Ausführungen einer renommierten Wissenschaftlerin des Max-Planck-Instituts für Bildungsforschung nachzulesen ist (Stern, E., 2003).

Bestätigt fühle ich mich vor allem durch die Erfolge der Lernenden.

9.4 Abschliessend noch einige Gedanken und Erfahrungen zur **Dauer der Lektionen**.

Weil sich kognitiv behinderte Kinder oft nur schwer über eine längere Zeit konzentrieren können, geht man im Allgemeinen davon aus, dass die Lektionen möglichst nicht zu lange dauern sollten.

Sowohl bei der Arbeit mit Klassen wie im Individualunterricht habe ich jedoch eher gegenteilige Erfahrungen gemacht. Weil behinderte Menschen in der Regel eine längere Anlaufzeit benötigen, um sich auf die Thematik einzustellen, sind *längere Lektionen* zur Verminderung von Stress bei Lehrenden und Lernenden geeigneter. Die Aussicht, den Unterricht mit Erfolgserlebnissen abzuschliessen zu können, wird entsprechend grösser.

[1] Dieses Bildungsideal ist seit dem 19. Jahrhundert eng mit dem Rechen- bzw. Mathematikunterricht verbunden. vgl. dazu den Text „Eine kleine Kulturgeschichte des Rechnens und des Rechenunterrichts"

Und wenn das gelingt, so ist gleichzeitig eine positive Grundlage für die nachfolgende Rechenstunde gelegt.
Die so häufig beklagten Konzentrationsstörungen intellektuell beeinträchtigter Kinder werden meines Erachtens zudem oft vorschnell als Defizit der Lernenden diagnostiziert. Meiner Erfahrung nach ist die mangelnde Konzentration oft ein warnender Hinweis darauf, dass Schülerinnen und Schüler mit dem Lerninhalt überfordert sind. Bei Aufgaben nämlich, die sie zu bewältigen vermögen, können sie oft erstaunlich lange und konzentriert bei der Arbeit sein.

Interessant ist in diesem Zusammenhang auch folgende Erfahrung: Wenn ich Kinder bzw. Jugendliche auf ihre zunehmende Ablenkbarkeit und/oder mangelnde Ausdauer ansprach, erhielt ich mehrmals die Antwort, es sei *langweilig.* Doch was bedeutete diese Begründung? Jedenfalls nicht das, was wir spontan darunter verstehen. Wenn ich nämlich die Kinder fragte, welche Aufgaben, welches Thema sie stattdessen zu bearbeiten wünschten, wählten sie in der Regel solche, die weniger grosse Anforderungen stellten, weil sie ihnen bereits recht gut bekannt waren.[1]

10 Zusammenfassung

Im Besta-Konzept sind zwei Gegensätze vereinigt, die auf den ersten Blick als unvereinbar gelten:
Es ist einerseits **traditionell,** denn es arbeitet mit den kulturellen Errungenschaften, die sich im Laufe von Jahrhunderten entwickelten: Dem dezimalen *Stellenwertprinzip,* das bereits der römische Abakus kannte, und dem *indisch-arabischen Zahlensystem*, das den *algorithmischen Rechenmodus* ermöglicht.[2]

In methodischer Hinsicht ist das hier vorgelegte Konzept allerdings in verschiedener Hinsicht **alternativ.**
Ins Auge fällt zunächst, dass ein für kognitiv beeinträchtigte Menschen besonders wichtiges Anwendungsgebiet – das **Rechnen mit Geld –** als **eigenständiges Programm** (Modul B) zur Verfügung steht. Es ist gezielt auf den konkreten Umgang mit Geld zugeschnitten und so aufgebaut, dass es *ohne jegliche Vorkenntnisse* im Rechnen erarbeitet werden kann. Die Voraussetzungen werden im Rahmen dieses Programms zunächst gezielt erarbeitet und führen dann kontinuierlich weiter zu den Lernzielen „Vom Geld zur Summe“ (Geldmengen können zusammengezählt und die Summe notiert

[1] Mir geht es übrigens ähnlich z. B. bei einem anspruchsvollen Vortrag: Wenn ich die Ausführungen verstehe, kann ich mich wesentlich länger konzentrieren, während ich mich andernfalls zu langweilen beginne.

werden) sowie „Vom Preis zum Geld“ (Preise können mit quantitativ und qualitativ unterschiedlichen Geldmengen bezahlt werden). Bei diesem Programm bietet sich die Arbeit mit dem dezimalen Stellenwertsystem sozusagen natürlicherweise an und wird somit auch nicht als besonders ungewöhnlich beurteilt.

Auf Skepsis stösst hingegen gelegentlich das Programm von Modul C „Zählen und Rechnen gemäss Positionssystem“, weil hier das Stellenwertprinzip sowie der entsprechende algorithmische Modus des Rechnens bereits *im Erstrechenunterricht* eingeführt werden. Meiner Erfahrung nach bietet dieses Vorgehen jedoch einen grossen Vorteil: Es wird damit möglich, den positionalen Zahlenraum bis in hohe Zahlenräume auf einfachem, direktem und schnellem Weg zu vermitteln.

Mit dem Entscheid, dem Positionssystem den Vorrang zu geben, ergibt sich zwangsläufig eine weitere Konsequenz: Der Zahlenraum wird in zweistelliger Form *vorgegeben*, muss also vom Kind nicht mittels Rechenoperationen konstruiert bzw. „entdeckt“ werden.

Und dies wiederum erleichtert den Verinnerlichungsprozess, der im Besta-Konzept gezielt gefördert wird. Denn das konkrete Handeln mit Mengen steht zunächst jeweils im Vordergrund und führt dann über die verschiedenen Niveaustufen (Verinnerlichungsebenen) zum Rechnen mit Zahlen (Symbolebene).

Anders als üblich, wird im Besta-Konzept das Hilfsmittel (hier vor allem der Besta-Abakus) nicht im herkömmlichen Sinne eingesetzt, um schwachen Schülerinnen und Schülern beim Lösen von Rechenaufgaben behilflich zu sein; mit Zahlen wird vielmehr erst dann gerechnet, wenn die entsprechenden Voraussetzungen gründlich erarbeitet worden sind.

Die Lernenden eignen sich den Zahlenraum zunächst durch ausgedehnte Zählübungen an und erwerben auf diese Weise den ordinalen und kardinalen Aspekt des Zahlbegriffs. Daran anknüpfend werden die Lernenden über das „erweiterte Zählen“ in die einfachste Form der Operation eingeführt.

Es folgt das anspruchsvolle Operieren mit simultanen Mengen, wobei sich dieses *Rechnen* auf die Einer-Stelle bzw. auf den Übergang von der Einer- zur Zehnerstelle beschränken kann. Die Ausweitung des Zahlenraum ist dann nur noch ein kleiner und im Prinzip unbedeutender Schritt, da kein qualitativ neuer Lernschritt zu erarbeiten ist.

Aus dem üblichen Rahmen des Rechenunterrichts fällt auch die Entscheidung, die besonders schwierige Operation der Subtraktion über längere Zeit zurückzustellen.

* * * * *

Literatur

AEBLI, H.: Grundformen des Lernens. Stuttgart, 1981, 2.Aufl.

AYRES, A. J.: Bausteine der kindlichen Entwicklung. Berlin/Heidelberg/New York, 1984.

BISCHOFF, J. P.: Versuch einer Geschichte der Rechenmaschine. Ansbach 1804; Nachdruck : München, 1990

BREITENBACH, E. & **JAROSCHECK**, E.: Tolpatschig und ungeschickt. Kindliche Dyspraxien. Würzburg, 1995.

BRUNNER, J. S.: Studien zur kognitiven Entwicklung. Stuttgart, 1971.

DEHAENE, S.: Der Zahlensinn. Basel/Boston/Berlin, 1999.

GARDNER, H.: Abschied vom IQ. Die Rahmentheorie der vielfachen Intelligenzen. Stuttgart, 1981.

GERRITZEN, L. (Hrsg): Zwanzigeins. Für die unverdrehte Zahlensprechweise. Bochum, 2008

HAUSMANN, M.: Eine Frage der Symmetrie. In: *Gehirn & Geist*, Nr. 6, 2003, S. 56-61

ICD: Internationale Klassifikation psychischer Störungen: Diagnostische Kriterien für Forschung und Praxis. Bern, 2000, 2.Aufl.

IFRAH, G.: Universalgeschichte der Zahlen. Frankfurt/New York, 1986.

INEICHEN, R.: Arithmetik und Algebra. SABE, 1982, 3.Aufl.

KLUGE, F.: Etymologisches Wörterbuch. Berlin/New York, 1989, 22.Aufl.

KUTZER, R.: Mathematik entdecken und Verstehen. Frankfurt a.M.:Bd.1, 1983; Bd. 2, 1985; Bd. 3, 1991.

LIEBERHERR, H.: Besta-Konzept – Rechnen mit Geld. Projektarbeit der Interkantonale Hochschule für Heilpädagogik Zürich, 2001

LOBECK, A.: Rechenschwäche. Geschichtlicher Rückblick, Theorie und Therapie. Luzern, 1996, 2.Aufl.

LURIA, A. R.: Die höheren kortikalen Funktionen des Menschen und ihre Störungen bei örtlichen Hirnschädigungen. Berlin, 1970.

LURIA, A .R.: Das Gehirn in Aktion. Einführung in die Neuropsychologie. Hamburg 1992

LURIA, **A .R. u. JUDOWTSCH, F. J.:** Die Funktion der Sprache in der geistigen Entwicklung des Kindes. Düsseldorf, 1982

MENNINGER, K.: Zahlwort und Ziffer. Eine Kulturgeschichte der Zahl. Göttingen, 1979, 3.Aufl.

MOSER OPITZ, E.: Zählen, Zahlbegriff, Rechnen. Bern, 2001.

MOSER OPITZ, E. & **SCHMASSMANN**, E.: Heilpädagogischer Kommentar zum Zahlenbuch. Zug, 2002.

OEHL, W.: Untersuchungen über Zahlendenken und Rechnen bei Schulanfängern. In: *Zeitschrift für Angewandte Psychologie und Charakterkunde*, Band 49, 1935.

PADBERG, F.: Didaktik der Arithmetik. Mannheim, 1994.

PIAGET, J.: Sprechen und Denken des Kindes. Düsseldorf, 1982

RADATZ, H. / SCHIPPER, **W.**: Handbuch für den Mathematikunterricht an Grundschulen. Hannover, 18. Aufl., 2007

RADIGK, W.: Kognitive Entwicklung und zerebrale Dysfunktion. Dortmund, 1991, 3.Aufl.

STAUB-VERHEES, B.: Auch ich kann Rechnen lernen. In *ALG*, Nr. 83, 1999.

STERN, E.: Wissen ist der Schlüssel zum Können. In: *Psychologie Heute*, Juli, 2003.

WAIS, M. & **KÖSTER-WAIS**, H.: Zur Therapie der Raumanalysestörung bei rechtshemisphärisch Hirngeschädigten. Frankfurt a. M., 1984.

WITTGENSTEIN, L.: Tractatus logico-philosophicus. 1921; Ausgabe Suhrkamp-Verlag, 1963.

WYGOTSKi, L. S.: Denken und Sprache. 1971, 3. Aufl.

* * *