„Auch ich kann Rechnen lernen“

Das Besta-Konzept

M o d u l   C

Zählen und Rechnen gemäss Positionssystem

„Die gegenwärtig im Bereich der Sonderschule angewandte strukturdesorientierte schrittweise Erweiterung des Zahlenbereiches erlaubt dem Schüler trotz häufiger Wiederholungen und Übungen keine hinreichende Einsicht in den Aufbau des Stellenwertsystems“ ... Und auch die „... Forderung nach der Einhaltung sonderpädagogischer Prinzipien wie kleinste Schritte, Anschauung durch alle Sinne usw. benachteiligt den Schüler zusätzlich“. (R. Kutzer, 1983)

„Alle diese Rechenbretter zeugen vom Fortschritt, welcher im praktischen Rechnen erzielt worden ist; denn das Rechnen auf dem Rechenbrett erreicht eine weitgehende gedankliche Übereinstimmung mit dem schriftlichen Rechnen unserer Tage. Das Addieren und der damit verbundene Übertrag in die nächst höhere Stufe war klar erfasst.“ (A. Lobeck, 1996)

Inhaltsverzeichnis

E i n l e i t u n g

- Modul C ist eines der beiden Lernprogramme des Besta-Konzepts. Es basiert auf den Leitgedanken, die in Modul A ausgeführt sind und hier vorausgesetzt werden.

Das vorliegende Programm ermöglicht einen alternativen Weg zum Erlernen von Addition und Subtraktion im mehrstelligen Zahlenraum

Eine solche Alternative halte ich für notwendig, weil meiner Erfahrung nach zu viele kognitiv beeinträchtigte Schülerinnen und Schüler in diesem Fach zu geringe Fortschritte machen, und sich unter den Lehrpersonen deswegen oft Ratlosigkeit ausbreitet.[1]
Das hängt wohl auch damit zusammen, dass es in der Deutschschweiz meines Wissens weder einen offiziellen Rahmenlehrplan noch verbindliche kantonale Lehrmittel gibt, die gezielt auf die Bedürfnisse von Kindern mit Behinderungen beim Erlernen des Rechnens ausgerichtet sind.

Dieser Mangel ist gleichzeitig eine Chance für die Realisierung eines alternativen Ansatzes. Der bereits wiederholt zitierte R. Kutzer, Autor eines mehrbändigen Werkes für den Mathematikunterricht an der Sonderschule für Lernbehinderte, bedauerte es ausdrücklich, dass er diese Freiheit nicht hatte. Er sah eine zentrale Zielsetzung des Erstrechenunterrichts für lernbehinderte Kinder darin, möglichst früh das Positionssystem zu vermitteln und den Zahlbereich zügig auf drei- und mehrstellige Zahlen auszuweiten (1991). Weil aber das für ihn zuständige deutsche Bundesland im Rahmenlehrplan für die Sonderschulen als erste Lernstufe die Erarbeitung der Zahlen 0 – 6 vorschrieb, musste sich der Autor zu seinem grossen Bedauern auf dieses reduzierte Ziel einstellen (Kutzer, 1983).

---

[1] Das hängt m. E. nicht zuletzt damit zusammen, dass auch kognitiv beeinträchtigte Schülerinnen und Schüler in Sonderschulen zunehmend nach Lehrbüchern unterrichtet werden, die für die Regelschule konzipiert wurden. Bei integrierten behinderten Kindern wird dies im Namen einer falsch verstandenen Integration nicht selten sogar für unumgänglich gehalten.

Unbeschwert von solchen Vorgaben habe ich es mir zur Aufgabe gemacht, mit einem alternativen Ansatz das zentrale Anliegen – die Einführung des Positionssystems unseres Zahlenraums bereits im Erstrechenunterricht – umzusetzen.

- Besonderes Gewicht haben im Besta-Konzept die **Dimensionen der Lernstruktur**[1], dargestellt als Lernstrukturgitter, das gleichzeitig auch als Lernprotokoll dienen kann: Auf der Ordinate (senkrecht) das steigende ***Niveau*** im Sinne der zunehmenden Verinnerlichung, auf der Abszisse (waagerecht) die zunehmend anspruchsvolleren Inhalte bzw. die steigende Aufgabenschwierigkeit in der Dimension ***Komplexität.***
  Die nachfolgende Abbildung 1 gibt einen groben Überblick über die Inhalte dieser Lerndimensionen.

Symbol			
Bild			
Handlung			
	Erarbeitung des Positionssystems	Addieren	Subtrahieren

Abb. 1 **Überblick über das Programm** [2]

- Die Abfolge der im Inhaltsverzeichnis festgehaltenen bzw. im Text ausgeführten Lernschritte orientiert sich im Wesentlichen an der zunehmenden **Komplexität** (Schwierigkeit), so dass die Teilschritte im Prinzip aufeinander aufbauen.

Dabei war es mir wichtig darauf zu achten, dass sich der Lernstoff verteilt, die jeweiligen Lernschritte also nicht mit zu vielen Anforderungen gleichzeitig befrachtet werden.

[1] nach Kutzer - vgl. dazu die entsprechenden Ausführungen im Modul A, Kapitel 7
[2] Dieses Strukturgitter ist gleichzeitig Lernprotokoll C I, in dem die jeweils erreichte Lernetappe notiert werden kann.

Die Lernschritte lassen sich folgendermassen skizzieren:

- Das **erste Kapitel** strebt zunächst zwei Ziele gleichzeitig an, wobei das jeweils eine Ziel auch zur Erreichung des jeweils anderen Zieles dient. Konkreter gesagt: Anhand des räumlich vorgegebenen Positionsmodells erlernen die Schülerinnen und Schüler die adäquate Systematisierung des Zählens und gleichzeitig wird das Positionssystem durch die Zählübungen eingeübt und gefestigt.
- Anschliessend wird das „Ortsbewusstsein" für die Zahlen gefestigt und die Korrespondenz zwischen Menge, Zahlwort und Ziffer hergestellt.
- Dieses Kapitel schliesst mit ersten Operationen im Sinne des „erweiterten Zählens" ab.

- Im **zweiten Kapitel** geht es um Additionen. Zu Beginn befassen sich die Lernenden mit den Zahlenbeziehungen innerhalb der Positionen, wobei es um das simultane[1] Vereinigen von Mengen geht.
- Dann stehen Rechnungen mit Zehnerübergang auf dem Programm, wobei vor allem das Zerlegen als eine wichtige Voraussetzung thematisiert und eingeübt wird.
- Schliesslich wird der Zahlenraum erweitert, sodass es dann möglich ist, das vorher Erlernte auf das Addieren mehrstelliger Zahlen anzuwenden und einzuüben.

- Das **letzte Kapitel** thematisiert in drei weiteren Lernschritten die Subtraktion: Rückwärts zählen, Subtrahieren innerhalb der Positionen, Subtrahieren mit Entbündeln.

  Subtrahieren ist der schwierigere Lernstoff [2] und wird deshalb im Besta-Konzept längere Zeit zurück gestellt bis die Schülerinnen und Schüler eine gewisse Beweglichkeit im rechnerischen Denken erworben haben.

- Wie die vertikale Dimension des Lernstrukturgitters zeigt (Abb.1), werden die Lernschritte auf mehreren **Niveaustufen** im Sinne zunehmender Verinnerlichung bzw. Abstraktion erarbeitet. Da ihre inhaltliche Gestaltung im Rahmen dieses Programms recht unterschiedlich ist, werde ich hier nicht im

[1] vgl. dazu die Ausführungen in Modul A, Kapitel 3
[2] vgl. dazu die Ausführungen in Modul A, Kapitel 3.4

Einzelnen darauf eingehen, es vielmehr damit bewenden lassen, sie vorerst nur generell als Handlungs-, Bild- und Symbolniveau in Erinnerung zu rufen.[1]
In der ersten Programmhälfte (erster und zweiter Lernschritt) liegt der Schwerpunkt auf dem Handlungs- und Bildniveau. Dieser Weg kann je nach Kompetenz der Lernenden eventuell verkürzt oder aber ausgedehnt werden. Wenn mit dem Fortschritt der Arbeit ohnehin der mit Zahlen operierende Lernstoff im Vordergrund steht, sollte auch die Verinnerlichung bereits so weit fortgeschritten sein, dass ein Rückgriff auf niedrigere Stufen nur noch bei neuen Lernschritten oder kurzfristig bei auftretenden Problemen nötig sein wird.
Auf der Symbolebene wird dann vorwiegend differenziert zwischen Rechnen mit visueller Unterstützung (schriftlich) und mündlicher Aufgabenlösung.

- Die *Handlungsebene* ist in Form des zweistelligen Positionssystems vorgegeben. Es handelt sich dabei um Teile des Besta-Abakus, der in seiner kompletten Form für das Lernziel „Rechnen mit Geld“[2] konzipiert wurde.

Abb. 2: **Ungeordnete Elemente des Besta-Abakus mit Zählmaterial**

[1] vgl. dazu die Ausführungen in Modul A, Kapitel 4
[2] Vgl. Modul B

Wie die folgende Abbildung zeigt, sind die beiden **Stellen (Positionen)** von rechts nach links zu positionieren. Weitere Stellenbretter erübrigen sich, weil bei der Ausweitung des Zahlenraums in der Regel bereits ein höheres Abstraktionsniveau erreicht sein sollte.

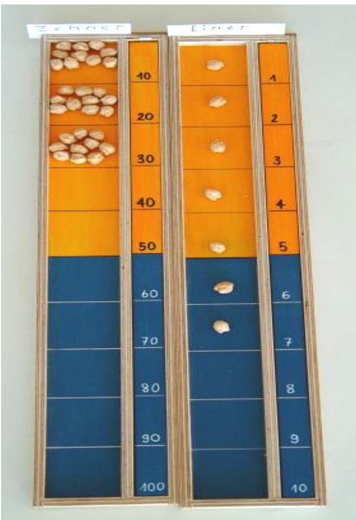


Abb. 3: **Der zweistellige Zahlenraum mit der Menge 37**

Es entspricht unserem dezimalen Zahlensystem, dass jede der beiden vertikal ausgerichteten Stellen **10 Einheiten** umfasst. Die *farbige Strukturierung* innerhalb der Positionen in je 5 gelbe und blaue Einheiten[1], die der Struktur unserer Hände entspricht, ermöglicht bzw. erleichtert die simultane Mengenerfassung.
Jedem Brett ist ein entsprechender **Ziffernstab** beigeordnet. Die Ziffern sind von oben (jeweils kleinste Zahl der Position) nach unten (jeweils grösste Zahl der Position) angeordnet. Mit dieser Anordnung wird ein wichtiges Prinzip gewährleistet: Nur eine solche Anordnung ermöglicht nämlich eine weitgehende Kompatibilität zwischen den Verinnerlichungsstufen. Dies ist leicht einzusehen wenn man sich vor Augen hält, dass Abfolgen zeichnerischer oder schematischer Darstellungen in der vertikalen Dimension jeweils von oben nach unten – und nicht umgekehrt - verlaufen. Und auch bei den so genannten schriftlichen Rechnungen gemäss algorithmischem Modus werden die Zahlen, mit denen operiert wird, von oben nach unten untereinander geschrieben. Diese Parallelität ist

[1] Diese Farben wurde von Frau R. Nef, Flawil, vorgeschlagen, weil sie farbenblinden Menschen die bestmögliche Unterscheidung bieten.

mir so wichtig, dass ich es für vertretbar halte, auf die Möglichkeit einer dreidimensionalen[1] Veranschaulichung zu verzichten.
Die Ziffernstäbe sind nicht fixiert, sondern lassen sich herausnehmen und umdrehen. Auf der Rückseite sind die Ziffern nicht mehr angeführt. Das ermöglicht den Lernenden Übungsvarianten zur Korrespondenz von *Mengen, Zahlwörtern und Ziffern.*
Als **Zählmaterial** eignen sich verschiedene Dinge, die aber wegen des Bündelns nicht allzu gross sein sollten. Bewährt haben sich sogen. Kichererbsen, weil sie wegen ihrer Oberflächenstruktur besser zu handhaben sind als beispielsweise glatte Bohnenkerne, Perlen usw.
Von den **Mengenzylindern,** die in erster Linie für die Arbeit mit Geld (Modul B) gedacht sind, dienen 10 Behälter zum Bündeln der je 10 Einer zu 1 Zehner. Zehn Kichererbsen finden darin so gut Platz, dass die Behälter auch übereinander gestellt und so zur Menge 100 gebündelt werden können. Selbstverständlich kann man auch andere geeignete Behälter benutzen oder die 10 Einer direkt auf die entsprechende Zehnerstelle legen (vgl. Abbildung 3).
Die Positionen werden durch die **Bezeichnungen** E i n e r bzw. Z e h n e r gekennzeichnet, die oberhalb der entsprechenden Stellenbretter gelegt werden.

- Unter **„Anmerkungen"** sind den Lernschritten und -stufen jeweils eine Reihe von zusätzlichen Informationen angefügt. Es handelt sich dabei einerseits um ergänzende Hinweise zu Problemen und/oder Lösungen, auf die ich im Laufe meiner Arbeit gestossen bin. Zum Anderen gehe ich auch auf Fragen ein, die mir wiederholt von Lehrpersonen oder Eltern gestellt wurden.

- Die den Kapiteln zugeordneten **Arbeits- und Übungsblätter, die Lernprotokolle** sowie die **Lernschritte des Computerprogramms**[2] werden im Text oder unter „Anmerkungen" jeweils erwähnt. Während *in der schriftlichen Ausgabe* einige Lernschritte differenzierter abgestuft sind, greifen die *Lernschritte des Computerprogramms* gelegentlich etwas vor.

[1] Bei einem „Zahlenturm" beispielsweise wäre das erste Element jeweils das unterste.
[2] Es wurde in unzähligen und unbezahlbaren Arbeitsstunden von **Jürg Studer**, Zürich, **gratis** erstellt.

Das dekadische Positionssystem[1]

1 Strukturiertes Zählen bis 100 [2]

Mit diesem Lernschritt werden zwei Ziele gleichzeitig angestrebt: Die Schülerinnen und Schüler erlernen durch das Zählen bis 100 das System der Zahlenreihe und erarbeiten dabei gleichzeitig das Prinzip des dezimalen Stellenwertsystems.

1.1 Zu Beginn der Zählübungen werden die zu zählenden Elemente fortlaufend auf das Einer-Brett platziert bis es voll ist. Dann bündelt man die 10 Einer und überträgt sie auf den ersten Rang der Zehner-Position. Auf der nun frei gewordenen Einerstelle wird dann der Zählvorgang fortgesetzt.

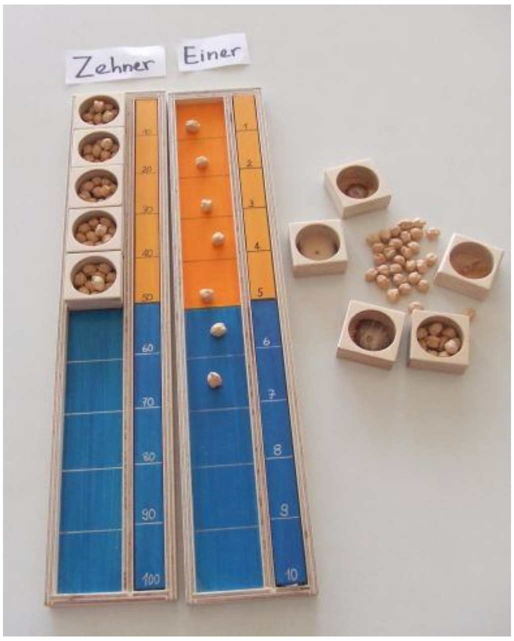


Abb. 4: **Zweistellige Menge auf dem Abakus mit Mengenzylinder**

Weil diese Art des Zählens für das Kind zunächst recht ungewöhnlich ist, dient das Handeln und begleitende Sprechen der Lehrperson so lange wie nötig als Modell.

[1] vgl. in Modul A, Kapitel 1
[2] vgl. in Modul A, Kapitel 2

Das Kind wird ermuntert, sich in den Zählrhythmus einzufädeln und es schliesslich selbst zu versuchen.

Die begleitende Verbalisierung des Bündelns und Übertragens lautet etwa so:

> *„Jetzt ist das **Einer**-Brett, wo auf jedem Platz immer nur **eine einzige** Erbse liegt, (wieder) voll. Ich räume es leer und lege die zehn Erbsen auf den ersten (zweiten usw.) Platz bei der nächsten Stelle. Sie heisst Zehnerstelle, weil hier auf jedem Platz 10 Erbsen liegen. Weil jetzt die Einer-Stelle wieder leer ist, kann ich hier mit dem Zählen weiterfahren."*

Mit der Zeit reicht eine kürzere Variante: *„Ich bündle, leg es rüber und bin jetzt bei..."* Schliesslich kann diese Verbalisierung ganz entfallen. Das laute Zählen ist aber weiterhin wichtig.

1.2 Wenn den Lernenden das Prinzip der Bündelung und der Systematik der Zahlwortreihe zumindest ein Stück weit geläufig ist, kann das strukturierte Zählen – ganz oder zunächst auch nur teilweise – ohne die vorgegebene Struktur des Handlungsmodells, also *auf neutraler Unterlage* durchgeführt werden. Die Lernenden müssen dann also beim fortlaufenden Zählen diese ***positionale Struktur selber herstellen.***

Abb. 5: **Strukturierte Mengen auf neutraler Unterlage mit Bündelungsvarianten**

Damit auch schwächere Kinder das Prinzip des strukturierten bzw. strukturierenden Zählens zu ***generalisieren*** vermögen, empfiehlt es sich, bei solchen Übungen gelegentlich verschiedene Materialien einzusetzen – was auch als Abwechslung willkommen ist.

Abb. 6: **Zählübung mit Zündhölzern**[1]

Wie die Abbildung zeigt, ist hier als Ersatz für die farbliche Strukturierung innerhalb der Stellen eine materialspezifische Variante möglich; zusätzlich ist eine räumliche Zäsur angedeutet. Bei anderem Zählmaterial muss diese Fünferstruktur immer unbedingt angedeutet werden, da andernfalls keine simultane Mengenwahrnehmung möglich ist.

Beliebt und zur Förderung der Bewusstheit sehr sinnvoll sind auch Zählübungen, an denen mehrere Kinder als „Zehner-Knaben“ bzw. „Zehner-Mädchen“ beteiligt sind.

[1] Dieses Zahlmaterial eignet sich auch besonders gut zur Ausweitung des Zahlenraums auf die 3. Stelle.

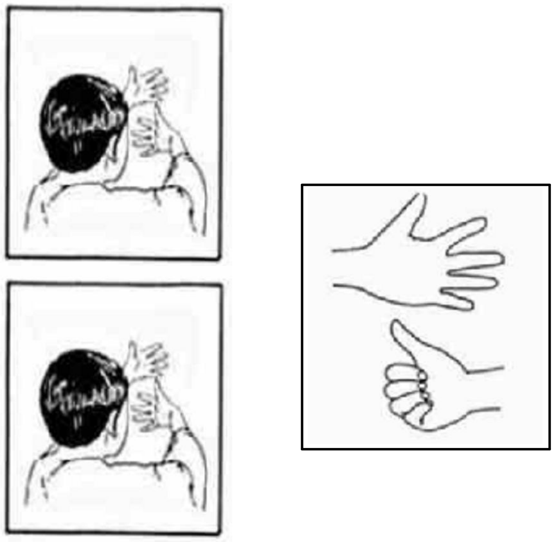


Abb. 7: **Darstellung der Zahl 26 mit Zehnerkinder und Fingermengen**

Vorgehen: Ein erstes Kind zählt fortlaufend an den Fingern bis 10;
bei 10 angekommen tritt es als Zehnerkind auf die linke Seite.
Nacheinander zählen nun weitere Kinder fortlaufend und reihen sich anschliessend hintereinander (!) als Zehnerkinder ein.
Beim begleitenden Sprechen der Zahlwörter sagt das „Einer-Kind“ jeweils nur die Zahl seiner Stelle – also z. B. „sechs“ – während die „Zehner-Kinder“ den jeweils erreichten Rang ihrer Stelle gemeinsam benennen, z. B. „und zwanzig“

1.3 Das Ziel ist erreicht, wenn die Lernenden die Positionsstruktur so weit verinnerlicht haben, dass sie die Zahlenreihe mit den Zehner-Übergängen ***aufsagen*** können, ohne dabei die Struktur herzustellen.
Vielen Lernenden ist es dabei eine Hilfe, wenn sie noch eine Zeit lang das Zählen, Bündeln und Übertragen mit Handbewegungen andeuten dürfen.

Anmerkungen:

- Zu Beginn der Zählübungen am Handlungsmodell besteht beim Weiterzählen über den ersten Zehner hinaus eine besondere Schwierigkeit darin, dass entgegen dem Augenschein – auf dem Ziffernstab steht ja „10“ – jeweils das Zahlwort des 10. Einers nicht mehr benannt werden darf. Stattdessen muss das Kind lernen, aufgrund der bereits vorhandenen Zehner unmittelbar auf die nun

erreichte Zahl des nachfolgenden Zehners umzuschalten. Die Lehrperson kann hier in der Anfangszeit bzw. so lange wie nötig die Brückenfunktion übernehmen und dabei jeweils auch auf den entsprechenden Zehner-Rang hinweisen.
Sobald das Kind die Zahlenabfolge bis 9 beherrscht, sollte der Ziffernstab umgedreht werden. Denn wenn die Ziffer 10 nicht mehr zu sehen ist, fällt es den Kindern in der Regel leichter, auf den nachfolgenden Rang der Zehner-Stelle umzuschalten.

- Beim fortlaufenden Zählen ist unbedingt darauf zu achten, dass *Handeln* und *Sprechen* synchron verlaufen. So kann das Kind die Erfahrung machen: Was ich *tue* und *sehe* stimmt überein mit dem was ich *sage* bzw. *höre.*
  Bei zweistelligen Zahlen ab *dreizehn* hat es sich als hilfreich erwiesen, diesen Zusammenhang zunächst bei jedem Zählschritt durch Betonung und begleitende Gestik besonders hervor zu heben. Dadurch festigt sich die räumliche Ausrichtung der Stellenwerte, was umso nötiger ist, da ja im Deutschen bei den gemischten zweistelligen Zahlen die Schreibrichtung gegenläufig ist (z. B. **1**3 = drei**zehn**“)
- Bei den zweistelligen Ziffern fallen „elf“ und „zwölf“ als einsilbige Zahlwörter aus dem Rahmen und eignen sich daher nicht, um die Korrespondenz zwischen visueller und verbaler Struktur transparent zu machen. Bei Bedarf kann hier die Logik der Abfolge in Analogie zu den nachfolgenden Zahlwörtern vorübergehend dadurch hergestellt werden, dass man – zwar nicht korrekt, wohl aber hilfreich – die Zahlenreihe mit den Wörtern *„einszehn“* bzw. *„zweizehn“* fortsetzt.
  Mögliche Befürchtungen kann ich mit meinen Erfahrungen zerstreuen, dass die Kinder dennoch über kurz oder lang die konventionellen Bezeichnungen erlernten, was einigen Schülerinnen und Schülern wegen dieses Umwegs sogar erleichtert wurde.[1]
- Bei der Übungsvariante unter Punkt 1.2 sind die Finger bzw. die beiden Hände analog der Zahlenabfolge auf den Positionsbrettern in vertikaler Haltung auszurichten (vgl. dazu das **Arbeitsblatt C 1).**

[1] Zum Problem der deutschen Zahlwörter vgl. in Modul A, Absatz 5.6

Aus dem gleichen Grund stellen sich die konkreten „Zehnerkinder“ jeweils hintereinander; nur so kann die Rangfolge von oben nach unten abgebildet werden und so auch mit der bildlichen Ebene übereinstimmen (vgl. Abb. 7).

- Mit dem **Lernprotokoll C II** lässt sich der Verlauf dieser Lerneinheit dokumentieren.
- Im **Computerprogramm** sind dem Thema **Zählen** die **Lernschritte 1 a bis d** gewidmet. Weil der Lernschritt **1 a** das Zählen bis 10 thematisiert, steht er am Anfang dieser Gruppe, ist aber gleichzeitig dem folgenden Kapitel 2.1 zuzuordnen.

  Der **Lernschritt 1 b** entspricht in den **Stufen 1 bis 7 dem Zählen bis 100**, während die beiden folgenden Stufen 8 und 9 exemplarisch **über den Hunderter hinausführen.**

  Nochmals weiter führen die Lernschritte **1 c und d**, wobei hier der Übungsschwerpunkt bei den Positions**übergängen** liegt. Die Lernenden können diese Übungen bei Bedarf zu einem späteren Zeitpunkt durchführen.

2 Mengen – Zahlwörter – Ziffern

Mit diesem Kapitel werden folgende Ziele angestrebt:
Einerseits wird das **simultane (**ganzheitliche) **Erfassen** vorgegebener **Mengen** eingeübt und damit auch das Loslösen vom Zählen angebahnt.
Gleichzeitig werden die **Ziffern**, also das zweite Kodierungssystem, eingeführt und eingeübt.
Und schliesslich geht es generell darum, eine enge Verbindung zwischen der Menge und ihren Symbolisierungen (Kodierungen), den Zahlwörtern und Ziffern, herzustellen.

2.1 Die Arbeit beginnt mit konkretem Material in der **Einer-Position**. Schwerpunkt sind hier Übungen zur simultanen Situierung in der Zahlenreihe, wobei sich einige Vorschläge zum Teil eher für jüngere Kinder eignen.

- Die Darstellungen auf den **Arbeitsblättern C 2 a – c** werden auseinander geschnitten und zur besseren Handhabung auf Holz oder Karton aufgeklebt.

Abb.8: **Mengenbilder u. Ziffern**

Fingermengen, Brettmengen und Ziffern lassen sich einander zuordnen:

- Sowohl als *Lottospiel* in Form der direkten Zuordnung,
- wie auch in der Art des *Memory-Spiels*, was sich hervorragend eignet zur Übung des Gedächtnisses und der Vorstellungsfähigkeit.
- Wenn man eine etwas schwierigere Variante bevorzugt, können die Einfärbungen bei den Fingermengen auch entfallen.

- Die ***Fingermengen*** sollten *mit allen Lernenden* aktiv erarbeitet und eingeübt werden:
  - Es geht zunächst darum, die vorgegebenen Fingermengen aufgrund der jeweiligen Struktur zu **erkennen** bzw. zu **benennen**;
  - dann werden Zahlwörter und/oder Ziffern vorgegeben, zu denen das Kind die Fingermengen **simultan herstellt**: Zuerst indem es die Lehrperson imitiert (oder sich an der Bildvorlage orientiert), dann zunehmend aus dem Gedächtnis, schliesslich mit geschlossenen Augen und zuletzt als Beschreibung (z. B. „acht Finger sind 5 Finger oben und 3 Finger unten).

PS: Die Arbeit mit den Finger**mengen** – nicht zu verwechseln mit dem sprechmotorischen Weiterzählen[1] mittels der Finger – ist besonders wertvoll, weil dabei die visuelle Wahrnehmung durch die taktil-kinästhetische Modalität unterstützt wird. Dank dieser zusätzlichen Sinnesmodalität lassen sich die Fingermengen mit *geschlossenen Augen* einüben, was eine vorzügliche Möglichkeit zur Anbahnung und Festigung der Vorstellungsfähigkeit ist. Da sich dieses Hilfsmittel zudem recht diskret einsetzen lässt, gibt es den Kindern im weiteren Verlauf des Lernprozesses eine gewisse Sicherheit, weil sie im Zweifelsfall diesen ältesten „Taschenrechner" im wahrsten Sinne des Wortes stets zur Hand haben.

Interessante Übungen zur Erarbeitung der Korrespondenz von Fingermengen, Brettmengen und Zahlen ermöglichen die Lernschritte **1 a** sowie vor allem **2 a bis d** des **Computerprogramms**

- Etwas Abwechslung bietet auch ein **Kugelstab.** Er leistet vor allem auch jenen Lernenden gute Dienste, die aus motorischen oder dyspraxischen Gründen nicht mit Fingermengen arbeiten können.

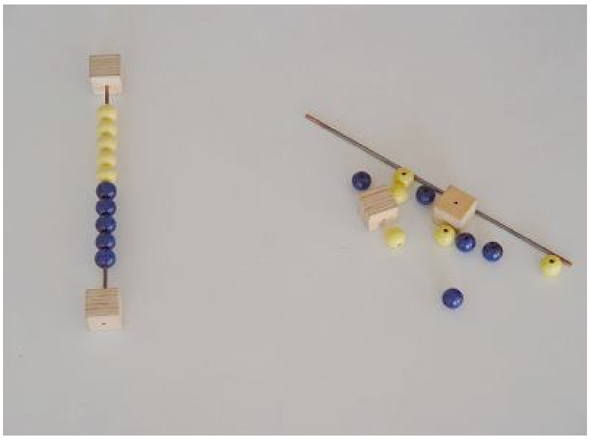


Abb. 9: **Kugelstab**

Es lassen sich damit simultane Mengen der Einerstelle vorgeben, die von den Lernenden zu *erkennen* und *benennen* sind. Andererseits eignet er sich auch vortrefflich dazu, mit einer einzigen Bewegung simultane Mengen *herzustellen*.

[1] z. B. bei der Aufgabe 8 + 5 situieren sich Erstklässler der Regelschule oft *verbal* in der Ausgangsmenge (8) und *zählen* dann 5 weiter, indem sie die zu addierende Zahl anhand der Finger bestimmen.

Die Vorstellungsfähigkeit kann auch hier besonders gefördert werden, wenn die Lernenden die jeweilige Farbstruktur beschreiben: z. B. *„sieben, das sind fünf gelbe und 2 blaue Kugeln“* – womit sich ganz ungezwungen erste Additionen ergeben!

- Eine weitere Übungsvariante kann am ***Positionsbrett* mit *gedrehtem Ziffernstab*** durchgeführt werden:
  - Das Kind würfelt mit dem ***Ziffernwürfel*** (nicht also mit einem herkömmlichen Würfel mit den Mengenpunkten bis 6 !); mit dem Spielstein ***springt*** es nun *von oben her* auf den Platz der gewürfelten Zahl. Anschliessend überprüft das Kind seine Lösung (sein Sprungziel) anhand des Ziffernstabes.

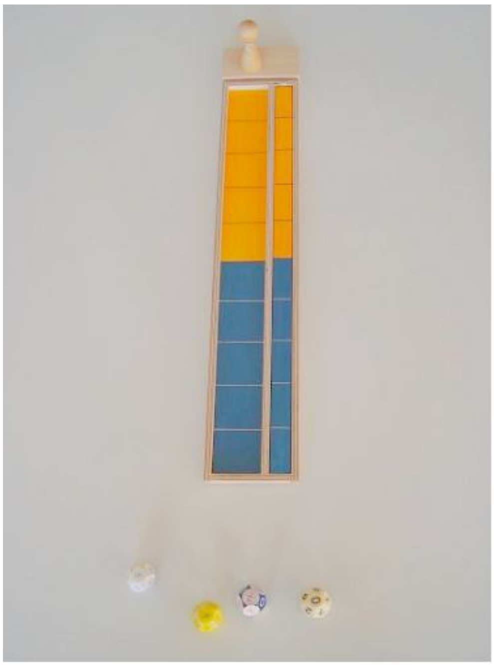


Abb. 10: **Einer-Brett mit Spielstein und Ziffernwürfeln**

  - Oder als Partnerarbeit: Das eine Kind *sagt* oder *schreibt* bzw. *zeigt* eine Zahl (Ziffer), und das andere Kind springt oder zeigt auf den entsprechenden Rang.

Eine vergleichbare Übung mit dem ***Positionsstreifen* (Arbeitsblatt C 3)** eignet sich besonders als Hausaufgabe und Stillbeschäftigung:

- Die von der Lehrperson eingefärbten *Mengen* werden vom Kind beziffert (in das grau schattierte Feld eingetragen),
- oder es werden umgekehrt die *Zahlen/Ziffern* vorgegeben, und das Kind färbt die entsprechenden Mengen ein.

Anmerkungen:

- Der **Kugelstab** ist mit einfachen Bastelutensilien herzustellen. Es ist wichtig, dass bei der Arbeit mit dem Stab die vertikale Stellung beibehalten wird!
- Zur Arbeit mit den **Fingermengen** ist folgendes zu ergänzen: Wie auf der Vorlage werden die Hände *übereinander* gehalten. Der Beginn mit der linken Hand wurde gewählt, nachdem eine Überprüfung ergeben hatte, dass nahezu alle Rechtshänder spontan mit ihrer linken Hand zu zählen beginnen.
  Wenn ein Wechsel der Hände – einmal Beginn mit der linken, dann wieder mit der rechten Hand – bei den Kindern keine Verwirrung auslöst, kann dies im Sinne einer Flexibilisierung geduldet werden.
  Andernfalls sollte bei Rechtshändern die linke Hand z. B. durch ein gelbes Band oder eine gelbe Markierung gekennzeichnet werden. Von der Idee, den Kindern je einen gelben und einen blauen Handschuh anzuziehen, rate ich hingegen ab, weil dadurch der besonders wichtige taktil-kinästhetische Spürsinn beeinträchtigt wird.
  Ganz wichtig: Es sollte den Kindern nicht erlaubt werden, die Menge 4 mit 4 Fingern statt mit dem Daumen und den 3 folgenden Fingern abbilden. Diese Haltung ist zwar motorisch relativ unpraktisch, aber wegen der Kontinuität der Reihe erforderlich. Gleiches gilt auch für die Fingermenge 9. Auf eine besonders gute Qualität der Fingerbilder – wie beispielsweise ihre stramme Ausrichtung – lege ich ohnehin keinen grossen Wert.
  Die Fortschritte bei den Übungen zur simultanen Mengenerfassung werden mit dem **Lernprotokoll C III** festgehalten.

2.2 Die Übungen werden nun im **zweistelligen Zahlenraum** weitergeführt.
Nach dem Motto „vom Konkreten zum Abstrakten“ verläuft die Arbeit wiederum zuerst „**von der Menge zur Zahl“,** danach jeweils umgekehrt **„von der Zahl zur Menge“.**

- Für die Arbeit mit dem **Abakus** steht das entsprechende Material bereit, d. h. 9 bereits gebündelt Zehner und ebenso viele einzelne Erbsen.
  - Die Lehrperson oder eine Partnerin/ein Partner positioniert eine zweistellige Menge auf die Bretter.
    Sie Lernenden ***benennen*** die Menge, wobei anfänglich die Ziffern auf den Stäben noch als Anhaltspunkte dienen können, dann jedoch zunehmend ausgeblendet werden sollten.
    Später wird umgekehrt ein zweistelliges Zahlwort vorgegeben und das Kind ***ordnet die entsprechende Menge zu***. Wenn möglich sind die Ziffernstäbe jetzt gedreht; mit den Zahlen auf der Rückseite kann anschliessend die Lösung kontrolliert werden.
  - Wenn das Kind beim simultanen Erfassen bereits einige Fortschritte gemacht hat, werden die ***Zahlen/Ziffern*** eingeführt. Dann aber müssen die Ziffernstäbe definitiv gedreht sein (**!**), weil sonst die Gefahr besteht, dass die Zehnerposition zweistellig geschrieben wird, und dann in Kombination mit Einer-Mengen dreistellige Zahlen resultieren würden.
    Die Lehrperson kann die Schreibweise zweistelliger Zahlen etwa so einführen:
    „Hier auf der Zehnerstelle sind 3 Plätze besetzt; deshalb schreibe ich diese Zahl auf den Zettel und lege ihn unterhalb des Zehnerbretts.
    Ebenso mache ich es bei den 8 Einern.
    Wenn ich die beiden Zettel näher zusammen schiebe, ergibt das die Zahl achtunddreissig.“

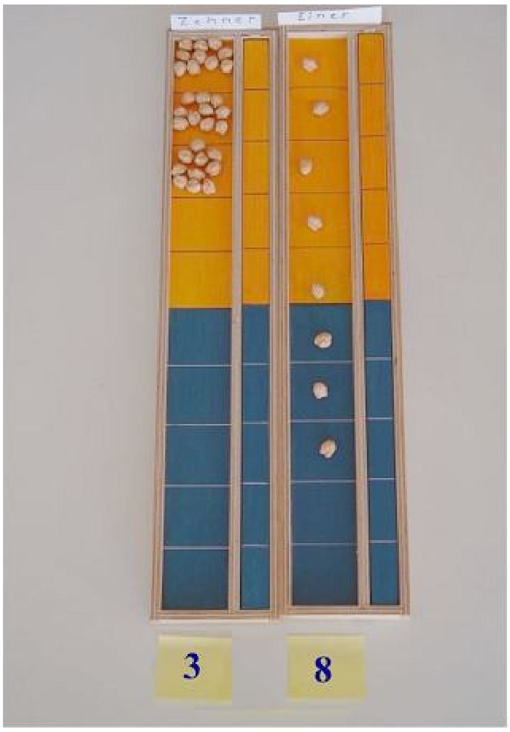
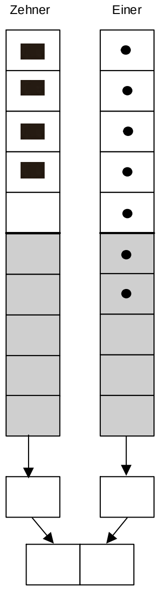


Abb. 11: **Bezifferte Menge am Handlungsmodell**

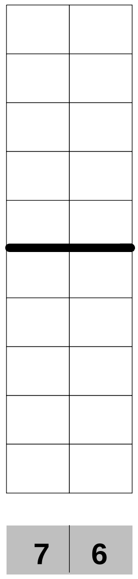
- Bei der letzten Übung schliesslich steht der umgekehrte Vorgang im Zentrum:
  Es sind die Ziffern/Zahlen vorgegeben, und das Kind stellt die entsprechenden Mengen her.

- Auf der Ebene der ***bildlichen Darstellungen*** gibt es Übungsmöglichkeiten, die sich zur Vertiefung vor allem als Stillbeschäftigung oder als Hausaufgabe eignen.
  Hier bietet sich die Arbeit mit dem ***Strukturschema*** an, das in zweifacher Version vorliegt: Als **Arbeitsblatt C 4 a** und vereinfacht als **Arbeitsblatt C 4b.**

  Abb. 12 a zeigt ein Beispiel für den Weg, der *von der Menge ausgeht, w*ährend das vereinfachte Schema 12 b den umgekehrten Weg darstellt, also *ausgehend von der vorgegebenen Zahl*, zu der die Lernenden die Menge herstellen



12 a: **Von der Menge zur Zahl**



12 b: **Von der Zahl zur Menge**

- Für Aufgaben auf der Ebene ***„neutrale Unterlage“*** gibt es mehrere Möglichkeiten:
  - Ein Ansatz mit konkretem Bildmaterial knüpft an die Zählarbeit mit den Fingern an. Zusätzlich zu den Abbildungen der Fingermengen auf **dem Arbeitsblatt C 1** stehen auf **Arbeitsblatt C 5** „Zehner-Kinder“ zum Ausschneiden zur Verfügung. Sie können als strukturierte Mengen vorgegeben und von den Schülerinnen und Schüler benannt und beziffert werden.

    Dann auch wiederum umgekehrt: Aufgrund vorgegebener Zahlen strukturieren die Kinder das entsprechende Mengenbild.

    Bei Übungen im Zahlenraum ab 50 werden die Abbildungen des jeweils anderen Geschlechts verwendet.

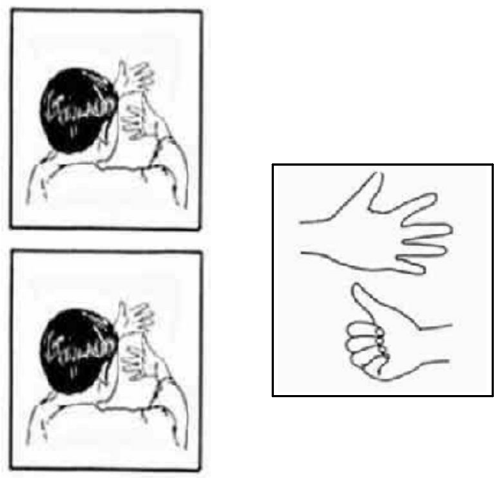


Abb. 13: **Zehnerkinder und Fingermenge**

- Mit den schematisierten Darstellungen der **Arbeitsblätter C 6 a & b** lassen sich weitere Übungen *„von der Menge zur Zahl"* und umgekehrt *„von der Zahl zur Menge"* durchführen.

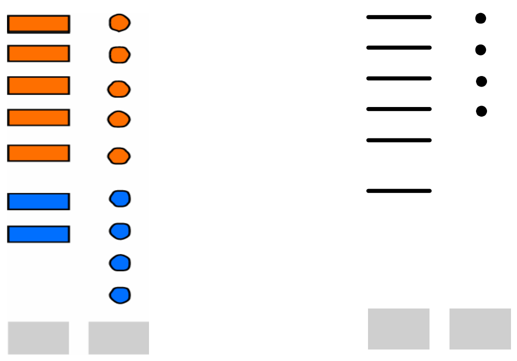


Abb. 14 a u. 14 b: **Schematische Mengenstrukturen**

Für den Weg „*von der Zahl zur Menge*" eignet sich besonders die Variante mit den vereinfachten Stellvertretern (14 b), da diese Darstellungen von den Lernenden schneller und einfacher hergestellt werden können.
Bei Bedarf kann die Fünferstruktur farblich markiert werden.

- Um die Beziehungen zwischen *Zahlwörter und Ziffern* zu festigen, sind zusätzlich auch folgende Übungen sinnvoll:

Es werden entweder *Zahlwörter* oder *schriftliche Zahlen* vorgegeben, denen die Lernenden die jeweils andere Symbolisierung zuordnen. Lernende mit Lesekompetenz können dabei von den Übungen der **Arbeitsblätter 7 a -f** profitieren.

Anmerkungen:

- Der Übungsverlauf kann anhand der **Lernprotokolle C IV a** und **b** dokumentiert werden.
- Vertieft wird dieses Thema durch zusätzliche Übungen mit den **Lernschritten 3 des Computerprogramms**.
  Dabei geht es in den Lernschritten **3 a und b** um Übungen *„Von der Menge zur Zahl"*, und zwar einmal *„ohne Zudecken"*, dann *„mit Zudecken"*. Die zuletzt genannte Übung trainiert vor allem die rasche simultane Mengenerfassung – ein geeignetes Mittel gegen das Verharren im Abzählen!
- Wenn es für Kinder, die mit dem Erlernen, Behalten und/oder Abrufen der Zahlwörter grosse Mühe haben, keine Übungsmöglichkeit mit dem Softwareprogramm gibt, empfiehlt sich als Hilfsmittel der „Sprechende Rechner", herausgegeben vom *Schweizerischen Blinden- und Sehbehindertenverband.*
- Es soll nochmals betont werden: Beim Einüben der Ziffern müssen am Abakus die Ziffernstäbe gedreht sein, weil ansonsten die Gefahr besteht, dass gemischte zweistellige Summen dreistellig geschrieben werden, also z. B. „508" statt korrekt „58". Mit der Verbalisierung *„hier sind… Plätze besetzt"* werden sich die Lernenden schnell an die richtige Schreibweise gewöhnen.
  Es wurde gelegentlich vorgeschlagen, den Ziffernstab der Zehnerstelle nur mit einstelligen Ziffern – also gleich wie beim Einerstab – zu beziffern. Meiner Erfahrung nach kann jedoch auf die gewählte Beschriftung des Zehnerstabs im Hinblick auf die Erarbeitung der Zehner-Stelle nicht verzichtet werden.
- Um die Bedeutung der Null als Leerstelle bewusst zu machen, sollten im Übungsrepertoire gelegentlich auch Aufgaben ohne Einer vorgegeben werden..
- Für Kinder, welche die Ziffern (noch) nicht (gut) schreiben können, stehen entweder eine Schablone, Stempel oder beschriftete Klebezettel mit den Zahlen 0 – 9 zur Verfügung. Denn ich halte es nicht für sinnvoll, das selbstständige

Schreiben der Ziffern zu lange und zu ausführlich zu üben, zumal viele Kinder mit primärer Rechenschwäche ohnehin mit der Formreproduktion auf Kriegsfuss stehen. Eine zu starke Betonung dieser Fertigkeit und allzu ausgedehnte Schreibübungen verleitet manche Kinder überdies zu der irrigen Meinung, das Schreiben der Zahlen sei das Wichtigste beim Erlernen des Rechnens.....

- Zur Frage, mit welcher Position beim *handschriftlichen* Schreiben zweistelliger Ziffern begonnen werden sollte, habe ich keine befriedigende Antwort gefunden. Es ist in jedem Fall ein Dilemma: Denn einerseits verläuft beim Zählen am Abakus die Richtung von rechts nach links und stimmt *in dieser Hinsicht* mit dem Zählvorgang am Abakus und der Ziffernstellung überein; andererseits aber verläuft die Richtung des Schreibens der Ziffern und das Sprechen der Zahlwörter invers.
  Viele lernbehinderte Menschen – aber nicht nur sie! – zeigen bekanntlich eine ausgeprägte Tendenz zur Vertauschung zweistelliger Zahlen (sie sagen oder schreiben z. B. *86* statt *68).* Zur Behebung dieses Problems helfen sich viele Lernende damit, dass sie die Zahlen spontan von rechts nach links schreiben, weil sie auf diese Weise zwischen Sprechen und Schreiben der Zahlen Übereinstimmung herstellen können. Da ich damit bisher keine schlechten Erfahrungen gemacht habe, stelle ich die Wahl der Strategie frei, sofern die Lernenden das Problem damit in den Griff bekommen. Verharrt aber ein Schüler/eine Schülerin in der Unsicherheit, dann leite ich sie zum Schreiben von rechts nach links an. Die Befürchtung, bei der Ausweitung auf den dreistelligen Zahlenraum könne diese Variante zur heillosen Verwirrung führen, hat sich bei meinen Schülerinnen und Schülern nicht bestätigt. Hingegen kann es dann ein Problem werden, wenn nicht mehr von Hand geschrieben wird, sondern eine Rechenmaschine bzw. eine Tastatur zum Einsatz kommt, da hier bekanntlich die Reihenfolge der Schreibweise von links nach rechts erfolgen muss.
  Die unzweifelhaft beste Lösung dieses Dilemmas wäre es, das Problem der verdrehten deutschen Zahlensprechweise ganz aus der Welt zu schaffen!
  Dieses Ziel streben einige engagierte Wissenschaftler und Praktiker an, die den

Verein “Zwanzigeins“ gegründet und kürzlich ihre Argumente auch als Buch publiziert haben.[1]

Dass ein solches Umdenken berechtigt und notwendig wäre, wird dann besonders nachvollziehbar, wenn man mehrstellige Zahlen mit der Tastatur der Schreibmaschine oder des Computers nach Diktat schreiben muss. Die Übungen der Lernschritte 3 im Besta-Softwareprogramm fordern geradezu heraus, die Zahlen unverdreht zu sprechen!

- Die **Lernschritte 3 c** und **d** des **Softwareprogramms** stehen an der Schnittstelle zwischen dem vorangegangenen Kapitel „Zählen“ und dem nachfolgenden Thema „Rechnen“.

  Beim **Lernschritt 3 c** besteht die Aufgabe darin, gebündelte Mengen auf der Stellentafel zu situieren. **Lernschritt 3 d** veranschaulicht darüber hinaus die additive Operation mit gebündelten Mengen.

3 Erweitertes Zählen

Dieser Lernschritt ist eine erste Annäherung an die Addition.

Zunächst wird der Schritt vom Zählen zum Weiterzählen bewusst gemacht.

Danach werden die Lernenden anhand solcher Aufgaben, die keine rechnerischen Anforderungen stellen, in die algorithmische Operation eingeführt.

3.1 In einem ersten Schritt bearbeiten die Lernenden Aufgaben wie diejenigen der nachfolgenden Abbildungen mit dem Auftrag:

„Schreibe die nächste Zahl“

5 3	3 0

Abb. 15 a und b: **Weiterzählen**

[1] http://www.verein-zwanzigeins.de; Gerritzen (Hrsg.): Zwanzigeins. Für die unverdrehte Zahlensprechweise, 2008

Entsprechende Übungen finden sich auf den **Arbeitsblättern C 8 a und b,** wobei mit der leichteren Variante (8 a) begonnen wird. Für weitere Übungen steht zusätzlich ein Blatt mit leeren Schemata zur Verfügung **(C 8 c)**.

3.2 Vom Zählen bzw. Weiterzählen zum *Rechnen* ist es nur ein kleiner Schritt, handelt es sich doch bei der Zahlenabfolge im Prinzip um eine fortlaufende „plus-1-Rechnung“.
Somit besteht nun die Möglichkeit, das Weiterzählen auch in Form einfacher Additionsaufgaben zu durchzuführen.
Dies gibt den Lernenden die Möglichkeit, sich mit der Darstellung der Operation vertraut zu machen und sich daran zu gewöhnen, die Ausrechnung wie beim Zählen stets bei der Einer-Stelle zu beginnen.
Das folgende Beispiel zeigt Aufgaben, die mit dem Aufgabenschema von **Arbeitsblatt C 9** durchgeführt werden können:

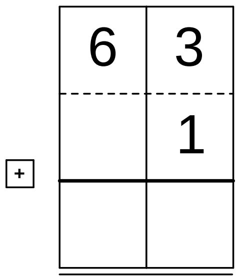
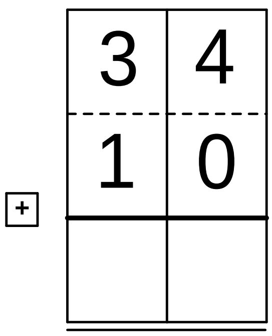


Abb. 16 a: **Plus-1-Rechnung**

Dieser Ansatz wiederum lässt sich auf zweifache Art ausbauen:



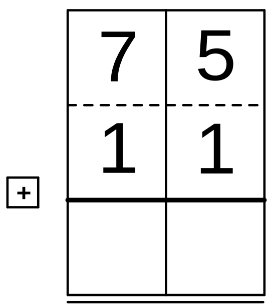


Abb. 16 b: **plus-10-Rechnung** Abb. 16 c: **plus-11-Rechnung**

3.3 Schliesslich können solche Aufgaben auch in *mündlicher Form* berechnet werden, zumal dies ein vorzügliches Mittel zur Förderung der Merkfähigkeit und zur Stabilisierung der Vorstellungsfähigkeit ist.
Dabei zeigt sich dann auch, ob bzw. wie zuverlässig das Vorstellungsmodell des zweistelligen Zahlraums bereits so weit verinnerlicht ist, dass das Problem der verdrehten Zahlensprechweise kein allzu grosses Hindernis mehr ist.

Anmerkungen:

- Der Stolz darauf, dass auch sie nun endlich „richtig" – und erst noch „schwierige" Aufgaben – rechnen können, löst bei nicht wenigen Schülerinnen und Schülern einen erfreulichen Motivationsschub aus.
  Vor allem Kinder, die im Zuge der Integrationsbemühungen eine Regelklasse besuchen, können nun unter Umständen erleben, dass ihre Aufgaben denjenigen ihrer Mitschülerinnen und Mitschüler zum Teil recht ähnlich sind.
- Bei den schriftlichen Operationen ist darauf zu achten, dass die Zahl des ersten Summanden erst dann grösser als 8 sein darf, wenn die Notation des Zehnerübergangs bereits thematisiert wurde.
- Nach dem Motto *„so viel Hilfe wie nötig, so wenig wie möglich"* sollten solche Aufgabenschemata wie auf den Arbeitsblättern 8 und 9 nur dann und so lange eingesetzt werden, wie die Lernenden mit der räumlichen Orientierung auf dem Blatt bzw. mit dem korrekten Untereinanderschreiben der Aufgaben Schwierigkeiten haben.
- Um zu verhindern, dass die Lernenden mit der Zeit in einen blossen Formalismus verfallen, sollte gelegentlich auch wieder ein Bezug zur Menge hergestellt werden: Die Kinder konkretisieren die Aufgabe auf dem Abakus und/oder dem Strukturschema bezw. stellen die Struktur der Menge auf neutraler Unterlage selber her.
  Eine Abwechslung bringt wiederum das umgekehrte Vorgehen: Eine Operation wird zuerst konkret mit Mengen dargestellt und dann in die Operation übertragen. Solche Übungen eignen sich besonders gut auch für Partnerarbeiten.
- Die Fortschritte dieses Lernschritts lassen sich mit dem **Lernprotokoll C V** festhalten.
- Im **Lernschritt 4 a des Computerprogramms** stehen solch rechnerisch anspruchslose Übungen unter dem Titel „**Einfache Additionen (plus 1 pro Stelle")** in

grosser Zahl zur Verfügung. Dabei gehen diese Übungen in zweifacher Hinsicht über das bisher Beschriebene hinaus: Einerseits werden die Aufgaben auf den drei- und vierstelligen Zahlenraum ausgeweitet, was nicht zuletzt auch vielfältige Erfahrungen im Umgang mit der Null ermöglicht; zum anderen sind hier Aufgaben einbezogen, bei denen der erste Summand auch 9 sein kann, so dass gleichzeitig die Notation der Bündelung eingeübt werden kann.

A d d i t i o n

4 Addieren in der Einer-Stelle

In dieser Lerneinheit werden die Schülerinnen und Schüler darin eingeführt, innerhalb der Einer-Stelle[1] die Summe zweier Mengen bzw. Summanden zu ermitteln.
Entscheidend ist hier, dass der Vorgang bei allen Variablen – d.h. bei beiden Summanden sowie dem Ergebnis – **simultan**[2] **erfolgen muss**. Also: Die Kinder situieren sich simultan in der Ausgangssumme, fügen dann simultan die zweite Summe hinzu und wissen dann sofort das Ergebnis. Nur so ist gewährleistet, dass auch kognitiv beeinträchtige Kinder beim Rechnen nicht (was es so oft beklagt wird) auf den Zählvorgang fixiert bleiben.
Nach den umfangreichen Vorarbeiten haben die Lernenden diesbezüglich bereits eine wichtige Kompetenz erworben: Ein in der Vorstellung verankertes „Orts-bewusstsein“ der Zahlenabfolge bezw. der damit einhergehenden Zahlbeziehungen innerhalb der Positionen. In Bezug auf Additionsaufgaben heisst das konkret: Sie können den jeweils ersten Summanden sowie das Resultat ganzheitlich im basalen Zahlenraum situieren (vgl. dazu auch die Software-Übungen **3 c**).

[1] Dies deshalb, weil Zahlwörter und geschriebenen Zahlen hier weniger grosse Anforderungen stellen; im Übrigen gelten ja die hier erarbeiteten Zahlbeziehungen auch für alle anderen Stellen.
[2] *mehrere gleichzeitig bzw. auf einen Blick*

Im aktuellen Kapitel müssen die Kinder nun zusätzlich lernen, den zweiten Summanden /die zu addierende Menge/Zahl simultan hinzu zu fügen. Das aber stellt grössere Anforderungen als man gemeinhin annimmt.

Denn relativ neu ist den Schülerinnen und Schülern das mit der Addition einhergehende Prinzip von der **strukturellen Freiheit der Menge**[1]. Das heisst: Sie müssen verstehen lernen, dass zwar bei den Ordnungszahlen immer die gleiche Reihenfolge besteht – die Zahl 2 beispielsweise also stets *nach* 1 folgt bzw. *vor* 3 kommt – trotzdem aber die *Menge* 2 auch *nach* 3, sowie auch nach 4 oder 10 usw. folgen bzw. hinzugefügt werden kann. (vgl. dazu auch die Software-Übungen **3 d**).

4.1 Mit den Mengenzylindern des Besta-Abakus lässt sich dies für die Lernenden veranschaulichen.

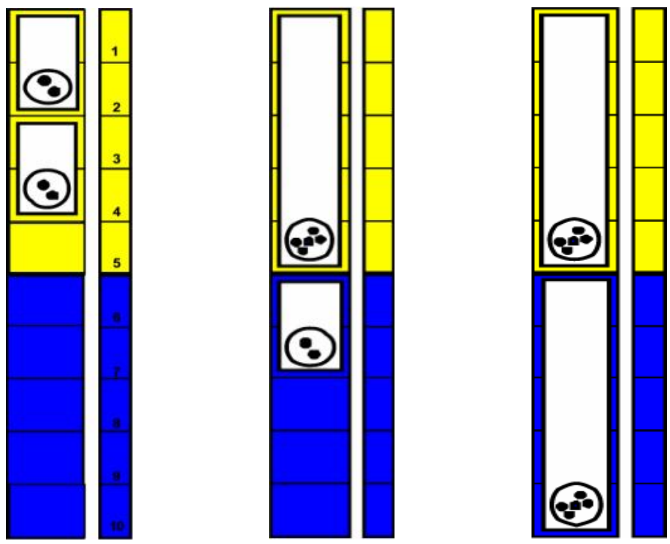


Abb. 17**: Einfache Additionen mit Mengenzylinder**

- Wenn die Kinder das Prinzip verstanden haben, kann man in der Einer-Stelle mit Aufgaben **+ 2** beginnen.

Dabei beschränken sich die Additionen zunächst bis zur Gesamtsumme 9.

3 vgl. dazu in Modul A das Kapitel 3.1. Das Prinzip ist den Lernenden von den vorangegangenen „plus-eins-Rechnungen“ zwar bereits bekannt, aber vermutlich zu wenig bewusst.

Zudem ist der erste Summand stets grösser als der zweite Summand.

Das Vorgehen kann am *Stellenbrett* oder mit den *Fingern* (bzw. ersatzweise mit dem *Kugelstab*) veranschaulicht und einübt werden:

Die Lehrperson sagt zunächst *„3"*, dann *„und 2 dazu":*

Das Kind springt am Stellenbrett mit dem Spielstein zuerst auf die 3. Stelle und springt dann 2 Plätze weiter auf den 5. Platz.

oder an den Fingern: Das Kind zeigt zuerst die Fingermenge 3 und fügt die beiden folgenden Finger miteinander hinzu.

Als Übergang vom konkretem Handeln zum Rechnen mit Zahlen – sowie auch als Hausaufgabe und Stillbeschäftigung – eignen sich auch Übungen mit dem *Positionsstreifen* (**Arbeitsblatt C 10**):

- Entweder gibt die Lehrperson die angedeuteten Mengen vor, zu dem die Lernenden dann die Zahlen in die Operation schreiben,
- oder die Zahlen sind vorgegeben, und die Lernenden markieren die entsprechenden Plätze auf dem Positionsstreifen.

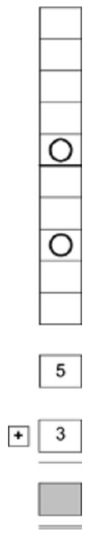


Abb. 18: **Strukturschema mit Rechnungsbeispiel**

- In weiteren Schritten folgen Aufgaben mit $\boxed{+3}$ und $\boxed{+4}$ wobei wiederum die Ausgangssumme stets grösser sein muss, sowie das Ergebnis höchstens 9 betragen darf.

Es ergeben sich so die 12 Aufgaben, die auf dem **Arbeitsblatt C 11 a, oberer Teil** zur Bearbeitung vorliegen. Die Aufgaben können zuerst in dieser Reihenfolge, dann auch gemischt vorgegeben werden.

4.1 Nun wird den Lernenden das **Kommutativprinzip**[1] vermittelt, also aufgezeigt, dass beim Addieren die Summanden austauschbar sind.

Veranschaulichen lässt sich dies wiederum am Abakus mit den Mengenzylindern, die in der umgekehrten Reihenfolge das gleiche Resultat ergeben.

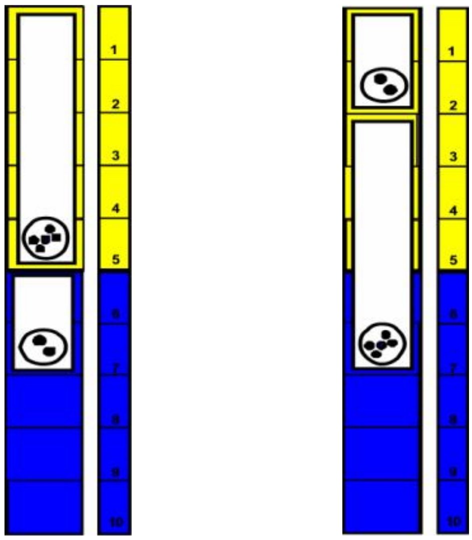


Abb. 19: **Austauschbarkeit der Summanden**

Gute Erfahrungen habe ich auch mit geeigneten Beispielen aus dem Alltag gemacht.

Mit der Anwendung des Kommutativgesetzes reduziert sich die Schwierigkeit beim Erlernen der Additionen ganz erheblich. Nur so kann auch verhindert werden, dass die Kinder schliesslich doch wieder aufs Zählen zurückgreifen; denn ein zu grosser simultaner Additionsschritt ist in der Wahrnehmung nicht überblickbar[2] und kann damit auch in der Vorstellung nur schwerlich realisiert werden.

[1] vgl. dazu in Modul A das Kapitel 3.3

[2] Bekanntlich kann das menschliche Auge nur bis zu 4 unstrukturierte Objekte simultan erfassen; darüber hinaus müssen sie strukturiert sein.

Es verwundert deshalb nicht, dass die meisten Kinder dieses mathematische Gesetz schnell zur Kenntnis nehmen und zuverlässig anwenden.
Damit sich die Kinder an die Umkehrung der Summanden gewöhnen werden diese 9 Aufgaben auf dem **Arbeitsblatt C 11 a unterer Teil** geübt, wiederum zuerst in dieser Reihenfolge, dann auch gemischt.

4.2 Als nächstes werden die Aufgaben **bis zur Basiszahl 10** thematisiert, welche im Prinzip keine besonders grossen Anforderungen stellen, denn dank des Umkehrprinzips ist „die Strecke“ gut zu überblicken.
Diese Aufgaben wurden zuvor ausgespart, weil beim algorithmischen Modus[1] (sogen. schriftliches Rechnen) das **Notieren des Resultats** speziell vermittelt werden muss. Zwar ist den Lernenden dieser Vorgang vom Zählen am Besta-Abakus im Prinzip bereits bekannt. Nun aber geht es darum, das von der Handlungsebene her bekannte Vorgehen

wenn die Stelle voll ist, wird die Einerstelle leer geräumt,
indem die 10 Einer gebündelt
und als 1 Zehner auf die nächste Stelle übertragen werden

auf die Notation anzuwenden:

Neun und 1 gibt 10. „Behalte 1, schreibe Null“ [2]

$$\begin{array}{rr} & 9 \\ + & 1 \\ \hline & {\scriptstyle 1} \\ & 1\,0 \end{array}$$

Das **Arbeitsblatt C 11 b** zeigt die 5 bzw. 9 (mit Umkehrung der Summenden) Aufgaben dieses Lernschritts.

4.4 Es folgen intensive Übungen mit dem Ziel, dass die Lernenden alle 66 Kombinationen der Additionsaufgaben im Zahlenraum bis 10, darin eingeschlossen also auch die Aufgaben + 1 und + 0, selbstständig und weitgehend

---

[1] vgl. Modul A, Kapitel 1.3
[2] Diese Formulierung, die auch bei den Aufgaben mit Zehnerübergang in analoger Weise angewandt wird, entspricht den Handlungsabfolgen: Denn es wird *zuerst* gebündelt und übertragen und d*anach* der 2. Teil der zerlegten Menge auf das Brett platziert.

ohne Hilfsmittel lösen können. Die Aufgaben befinden sich auf den **Arbeitsblättern C 12 a – c**

Als Übungsetappen haben sich bewährt:

- Wenn nötig werden die Aufgaben zunächst handelnd durchgeführt;
- dann arbeiten die Lernenden *schriftlich***,** weil diese Variante visuelle Stütze bietet und somit leichter ist;
- als Zwischenschritt folgen Übungen, bei denen die Aufgaben zwar *schriftlich vorgegeben, aber nur mündlich* gelöst werden.

  Zu diesem Zweck können die Aufgaben ausgeschnitten werden. Entweder ist das Resultat auf der Rückseite notiert, um den Kindern die Selbstkontrolle zu ermöglichen; oder die Kinder schreiben das Ergebnis dort auf. Es können dann fortlaufend diejenigen Aufgaben zur Seite gelegt werden, welche bereits gut beherrscht werden. Es wird die Kinder freuen wenn die Anzahl der zu erlernenden Aufgaben stetig abnimmt und die verbliebenen „Knacknüsse“ kein Grund mehr zur Resignation sind.

- Die *mündliche* Vorgabe und Lösung der Aufgaben ohne Visualisierung der Zahlen erfolgt erst in einem letzten Schritt, weil dies wesentlich höhere Anforderungen an die Vorstellungs-, Merk- und die Konzentrationsfähigkeit der Lernenden stellt.

Anmerkungen:

- Die *vertikale Form* der Aufgaben stösst im basalen Zahlenraum gelegentlich auf Skepsis oder gar Abwehr. Bei Kindern manchmal deswegen, weil sie evtl. bei ihren Geschwistern oder Kameraden die horizontale Anordnung gesehen haben, die ihnen deshalb als Prototyp des vermeintlich einzig „richtigen Rechnens“ gilt, das auch sie unbedingt erlernen möchten. In solchen Fällen habe ich gute Erfahrung damit gemacht, den Lernenden wenn möglich den Vorteil dieses Vorgehens – die Übertragbarkeit auf höhere Zahlenräume – deutlich zu machen. Und wenn auch das Argument *„alle Leute rechnen mit grossen Zahlen so wie du jetzt schon“* nicht zu überzeugen vermag, so hilft manchmal der Tatbeweis: Das Kind kann Erwachsenen (oder älteren Kindern) beim Addieren mehrstelliger Zahlen zuschauen.
  Sehr wichtig ist es auch, die Eltern über diese Entscheidung zu informieren und sie dafür zu gewinnen. Dabei machte ich allerdings gelegentlich die Erfahrung, dass manche Erwachsene nur schwer davon zu überzeugen sind, dass die

Anwendung des algorithmischen Modus im basalen Zahlenraum gewiss nicht gegen ein mathematisches Gesetz verstösst.

- Die positionale Schreibweise hat auch den Vorteil, dass das Gleichheitszeichen entfällt. Das ist deshalb vorteilhaft, weil viele Lernbehinderte grosse Mühe mit diesem Symbol haben, da sie den Sinn der Gleichung oft nicht verstehen. (Es ist ja auch keineswegs einfach, diesen Sinn zu vermitteln; vor Jahren war zur Veranschaulichung die „Mathematische Waage" beliebt, was aber die Kinder meiner Beobachtung nach oft mehr verwirrte als aufklärte.)
  Es versteht sich, dass das Ergebnis beim algorithmischen Modus <u>nicht</u> als „gleich" verbalisiert wird, sondern in der Formulierung ***„gibt zusammen*"** oder auch kürzer *„gibt"* bzw. *„ergibt"* (für diese zuletzt genannte Version entschieden sich die Hersteller des bereits erwähnten *Sprechenden Rechners).*
- Das Operationszeichen der Addition habe ich in der Regel als *„und"* verbalisiert. Sofern sichergestellt ist, dass die Funktion dieses Zeichens für die Lernenden eindeutig ist, lässt sich auch gegen die Bezeichnung *„plus"* nichts einwenden.
- Bei allen Übungsvarianten kann es während einer gewissen Zeit erlaubt sein, die *Fingermengen* als diskretes Hilfsmittel einzusetzen - nicht aber das Abzählen mit den Fingern!
  Die Lehrperson kann dem „Gesetz der Trägheit" entgegen wirken, indem sie die Lernenden immer wieder daran erinnert bzw. dazu ermuntert die Vorstellung einzusetzen. So lange die Rechnungen noch nicht automatisiert sind, ist das Wegdrehen oder Zukneifen der Augen ein sicherer Hinweis darauf, dass ein solcher Versuch im Gang ist.
- Ich möchte nochmals betonen: Für viele Kinder ist es eine grosse Hilfe, wenn ihnen die Aufgaben während einer gewissen Zeit *in schriftlicher Form* vorliegen. Dank dieser Wahrnehmungsstütze kann effektiv *das Rechnen* im Zentrum der Bemühung und der Aufmerksamkeit stehen. Anders gesagt: Wenn Aufgaben nur mündlich vorgegeben sind, ist das Operieren vor allem für kognitiv beeinträchtigte Schülerinnen und Schüler erheblich schwieriger und anstrengender, weil es wesentlich höhere Anforderungen an die Merkfähigkeit stellt.
- **Lernprotokoll VI** erfasst die Fortschritte beim Addieren im Zahlenraum bis 10

- Im Lernschritt **4 b** des **Computerprogramms** stehen den Lernenden zahlreiche Aufgaben zum Thema „**Additionen ohne Zerlegen**“ zur Verfügung, angefangen mit Aufgaben in der Einerstelle (Stufen 1 bis 3) bis hin zum vier- und fünfstelligen Zahlenraum (wobei diese Erweiterung bekanntlich keine neuen Anforderungen, wohl aber vielfältige Übungen ermöglichen). Lernende, die beim Lösen der schriftlichen Aufgaben bereits ausreichend kompetent sind, können sich an die anspruchsvolleren **mündlichen** Übungen des **Lernschritts 4 d, Stufen 1 bis 5** wagen.

5 Addieren mit Positionsübergang[1]

Beim Addieren zweier Summen, die zusammen grösser sind als 10, muss die Einer-Position überschritten werden. Dieser „Zehnerübergang“ ist selbst für Regelschüler oft eine grosse Hürde; sie neigen deshalb mehr oder weniger lange dazu, solche Aufgaben in der bekannten Art durch Weiterzählen zu lösen: Sie situieren sich verbal in der Ausgangsmenge (1. Summand) und zählen dann weiter, indem sie den 2. Summanden mit Hilfe der Finger bestimmen. Für kognitiv beeinträchtigte Kinder ist diese Strategie jedoch meines Erachtens alles andere als hilfreich und ganz und gar nicht empfehlenswert: Abgesehen davon, dass damit das Verharren im Abzählen geradezu vorprogrammiert wird, ist ein solches Vorgehen auch verwirrend, weil das, was die Kinder *sehen* (nämlich die jeweilige Anzahl der Finger), nicht übereinstimmt mit dem, was sie *sagen* (nämlich die Fortsetzung der Zahlwortreihe).

Im Besta-Konzept wird auch beim Zehnerübergang mit simultanen Mengen operiert, wobei jeweils zwei Teilstrategien zur Anwendung kommen: Einerseits das *Ergänzen* auf das Ende der Position und andererseits das *Zerlegen* der zu addierenden Zahl in Funktion der ergänzten Teilsumme.

[1] Ich bevorzuge die Bezeichnung „Positionsübergang“, weil es ja nicht nur um den Übergang vom Einer zum Zehner geht („Zehnerübergang“), sondern auch vom Zehner zum Hunderter, vom Hunderter zum Tausender usw.

5.1 Nach den vorangegangenen Additionsaufgaben auf das Stellenende (vgl. Punkt 4.3) stellt das **Ergänzen** keine wesentlich neue Anforderung. Neu ist jetzt jedoch die Fragestellung. Ausgehend von der Ausgangssumme muss sich das Kind die Frage stellen:

„Wie viel Platz habe ich noch auf dieser Stelle?“

Falls nötig können konkrete Übungen durchgeführt werden:

- o Übungen am Brett und am Kugelstab sind am einfachsten, weil hier die Anzahl auf das Stellenende sichtbar sind;
- o Übungen mit den Fingermengen sind für manche Kinder etwas schwieriger, weil die restlichen Finger abgeknickt sind und wegen dieser unvertrauten Form nicht immer gut wahrgenommen werden.
- o Schwieriger wird es, wenn am Positionsstreifen (vgl. Arbeitsblatt C 3) nur die Ausgangssumme sichtbar ist, während der Rest abgeschnitten wurde, die Ergänzung auf die Stellenbasis also erinnert bzw. vorgestellt werden muss.

Dank der Austauschbarkeit der Summanden (Kommutativprinzip) gibt es im Prinzip nur 4 Ergänzungsaufgaben zu lösen (vgl. Arbeitsblatt 11 b). Sie sollten zuverlässig beherrscht werden bevor das folgende Kapitel begonnen wird.

5.2 Der wichtigste Schritt zur Bewältigung des Zehnerübergangs ist das **Zerlegen** der Zahlen. Meiner Erfahrung nach ist es für kognitiv beeinträchtigte Menschen gleichzeitig der schwierigste Schritt, weil er recht grosse Anforderungen an die Flexibilität des Denkens stellt. So verwundert es nicht, dass ein relativ ausgedehnter Übungsprozess nötig ist bis diese Anforderung ohne ein zusätzliches Hilfsmittel einigermassen leicht und schnell beherrscht werden kann.
Ich möchte deshalb dafür plädieren, die Strategie des Zerlegens **mit den Fingermengen** (ersatzweise mit dem Kugelstab) einzuüben, und zwar gezielt *im Zusammenhang mit konkreten Additionsaufgaben*
wie z. B. bei der Aufgabe:

	8	*Die Fingermenge repräsentiert den zu addierenden Summanden 5;*
+	5	*davon wird die zu ergänzende Menge 2 weggenommen*[1]*, indem die entsprechende Fingeranzahl gebeugt wird;*

[1] Ganz beiläufig haben die Lernenden damit auch bereits erste Wegrechnungen durchgeführt.

die verbleibende noch zu addierende Menge 3 der weiterhin gestreckten Finger kann nun mit einem Blick erfasst werden

Bei konsequenter Anwendung des Prinzips der Kommutativität reduziert sich auch bei diesem Lernschritt wiederum die Anzahl der Aufgaben (20) und ihre Schwierigkeit. Das folgende Diagramm erfasst alle Aufgaben mit Zehnerübergängen und zeigt auch, welche Zahlen wie oft zerlegt werden müssen.

9 + 2								+ 2
9 + 3	8 + 3							+ 3
9 + 4	8 + 4	7 + 4						+ 4
9 + 5	8 + 5	7 + 5	6 + 5					+ 5
9 + 6	8 + 6	7 + 6	6 + 6	5 + 6				+ 6
9 + 7	8 + 7	7 + 7	6 + 7	5 + 7	4 + 7			+ 7
9 + 8	8 + 8	7 + 8	6 + 8	5 + 8	4 + 8	3 +8		+ 8
9 + 9	8 + 9	7 + 9	6 + 9	5 + 9	4 + 9	3 + 9	2 +9	+ 9

Abb. 20: **Diagramm der Additionen mit Zehnerübergang**

Die insgesamt 36 Aufgaben befinden sich auf den **Arbeitsblättern C 13 a u. b.** Diese Aufgaben können auch in das Aufgabenschema von **Arbeitsblatt 9** übertragen werden.

Während der ersten Übungsphasen können bei Bedarf parallel dazu die **Arbeitsblätter C 14 a u. b** benutzt werden. Auf dem zusätzlichen **Arbeitsblatt 14 c** können die Lernenden die zu addierende Zahl selbst in die beiden Teile zerlegen, welche eine aktuelle Aufgabe erfordert.

Das Beispiel bezieht sich auf die Aufgabe: **8 plus 3**

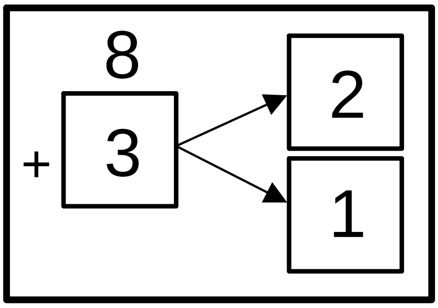


Abb. 21: **Zerlegung einer Zahl**

Der Übungsverlauf beim Zerlegen wird auf dem **Lernprotokoll C VII**, derjenige bei den Aufgaben mit Zehnerübergang auf dem **Lernprotokoll VIII** notiert.

Lernschritt 4 c des Computerprogramms bietet unter dem Titel **„Additionen mit Zerlegen“** zahlreiche Übungsaufgaben zum vorgängig beschriebenen Kapitel. Angefangen von Aufgaben im Zahlenraum bis 20 werden die Übungen schrittweise bis in den vierstelligen Zahlenraum erweitert.
Lernende, die beim Lösen der schriftlichen Aufgaben bereits ausreichend kompetent sind, können sich an die anspruchsvolleren mündlichen Übungen des **Lernschritts 4 d, Stufen 6 bis 9** wagen.

6 Erweiterung des Zahlenraums

Es ist für die Lernenden sehr motivierend, wenn das bisher Erlernte zügig auf den **drei- und vierstelligen** Zahlenraum ausgedehnt wird.

Achtung:
Für Lernende, welche vorgängig bereits die Lernschritte 1, 3 und 4 des Computerprogramms durchgeführt haben, enthält dieses 6. Kapitel keine neuen Informationen und Anforderungen. Es kann aber nicht schaden, gelegentlich hin und wieder zu überprüfen, ob die Lernenden die auf der Zahlenebene vorgenommenen Operationen wiederum auch auf die Mengen- bzw. Handlungsebene zurück übertragen können.

6.1 Für Schülerinnen und Schüler, die das Rechnen nach dem Besta-Konzept erlernt haben, ist dies im Grunde nur ein kleiner Schritt.

So konnte ich wiederholt erleben, dass selbst lernschwache Kinder die richtige Lösung fanden, wenn sie beim Zählen bis 100 (vgl. Kapitel 1) das Zehnerbrett gefüllt hatten, aber noch weiteres Zählmaterial vorhanden war.

> Einmal durfte ich sogar erleben, dass eine Jugendliche unserer Sonderschule nach einigem Nachdenken spontan sagte: „Eigentlich könnte man immer neue Bretter legen, bis zur Saane runter und noch viel weiter". Einfache Zählübungen hatten also genügt, dass eine 13-jährige Sonderschülerin die Unendlichkeit des Zahlenraums entdeckte!

Wenn die Kinder dies wünschen – und viele der von mir betreuten Kinder hatten diesen Wunsch – dürfen sie spätestens jetzt auch die Zählübungen ausdehnen. Es stehen dafür allerdings *keine weiteren Bretter* zur Verfügung, sondern die Struktur wird nun ausschliesslich auf neutraler Unterlage hergestellt.[1]

Initiiert werden kann der Schritt zum **3-stelligen Zahlenraum** folgendermassen:

> *Es ist eine Menge bestehend aus bereits gebündelten Zehnern vorgegeben, die das Kind mit einer noch unstrukturierten Menge von Einzelelementen zu ergänzen hat. Wenn es das Prinzip des Positionssystems verstanden hat, sollte es beim Weiterzählen den Übergang in die dritte Stelle nun spontan in die entsprechende Struktur umsetzen können. Das heisst: Die zu 100 ergänzte Menge wird gebündelt und nach links transferiert. Meiner Erfahrung nach erfüllen selbst leistungsschwache Kinder in den meisten Fällen diese Erwartung.*
>
> *Unsicher sind sie hingegen gelegentlich bezüglich der Entscheidung, wo es danach beim Zählen weitergeht, und häufiger ratlos wie man dies nun sagen soll. Dies ist eine willkommene Gelegenheit, um den Zusammenhang zwischen der Bezeichnung der Stelle und den ihnen entsprechenden Mengen bewusst zu machen, da dies ja bei der Hunderter- und Tausenderstelle besonders prägnant ist, weil hier die Stelle Bestandteil des Zahlwortes ist.*

[1] Die 10 Zehner-Mengenzylinder können zum Hunderter aufeinander gestapelt werden. Oder die 100 Erbsen werden in einen grösseren Behälter gegeben und nach links platziert. Ein praktisches Material zum Bündeln und Weiterzählen sind auch Zündhölzer und Geld.

Die Arbeit mit Geld eignet sich besonders gut für Zählübungen von der Hunderter- zur Tausenderstelle bzw. zur Darstellung des 4-stelligen Zahlenraums

Abb. 22: **Beispiel für den vierstelligen Zahlenraum**

6.2 Die **Additionen** stellen im erweiterten Zahlenraum keine neuen Anforderungen oder Probleme, da ja die bisher erarbeiteten Lösungsstrategien in allen Positionen die gleichen sind.

Man sollte aber einige Schwierigkeiten und Besonderheiten im Zahlenraum bis Tausend speziell berücksichtigen:

- Während bei Additionen *innerhalb der Stellen* die Grösse des Zahlenraums keine neuen Anforderungen stellt, steigt die Schwierigkeit mit der Anzahl der Übergänge, besonders wenn ein zweiter Übertrag aus einem ersten Übertrag resultiert.
- Fehleranfällig sind oft Aufgaben mit Null in den Summanden oder im Ergebnis.[1]
- Verwirrend können unter Umständen Aufgaben mit Stellenunterschieden sein, d.h. wenn beispielsweise einer der Summanden drei- oder vierstellig, der andere nur zwei- oder einstellig ist.

  Um die Schülerinnen und Schüler daran zu gewöhnen auf die richtige Stelle zu achten, sollten ihnen Additionsaufgaben mit unterschiedlichen Stellenkonstellationen gelegentlich auch diktiert werden. Dies festigt das Wissen um den mehrstelligen Zahlenraum wie auch den Zusammenhang zwischen Ziffern und Zahlwörtern.

---

[1] Das beobachtete ich öfter bei Regelschülern, während die nach dem Besta-Konzept unterrichteten Kinder im Allgemeinen weniger Probleme damit hatten.

Anmerkungen

- Bevor der Zahlenraum ausgeweitet wird, sollten die Lernenden eine angemessene Sicherheit hinsichtlich der bisher erarbeiteten Voraussetzungen und beim Lösen zweistelliger Aufgaben erreicht haben:

- Sie kennen das zweistellige dekadische Positionssystem und den Zusammen hang zwischen Mengen, Zahlwörtern und Ziffern;
- sie haben lange Erfahrung mit dem Bündelungsvorgang auf der Handlungsebene und können diesen Vorgang im Rahmen des algorithmischen Modus auf die Zahlenebene übertragen (Notation bei den schriftlichen Operationen);
- sie haben Additionen im basalen Zahlenraum eingeübt und dabei die Vereinfachung Dank des Umkehrprinzips (Kommutativität) schätzen gelernt;
- in einem weiteren Schritt haben sie schliesslich auch die Voraussetzungen für Additionen mit Zehnerübergang (Ergänzen und Zerlegen) erarbeitet und solche Aufgaben geübt.

- Abgesehen von einer Ausnahme[1] sollte der Rückgriff auf die Handlungsebene bzw. auf Hilfsmittel beim Lösen 3- und 4-stelligerAufgaben im Prinzip nicht mehr nötig und auch nicht mehr erlaubt sein. Das schliesst jedoch selbstverständlich nicht aus, dass sich ein Kind unter Umständen durch konkretes Handeln vergewissern möchte.

  Vor allem nach etwas längeren Unterbrüchen (Ferien, Krankheit usw.) kann es nötig sein, bereits erworbene Kompetenzen wieder aufzufrischen. In diesem Fall rate ich dazu, vorübergehend auf die entsprechenden Lernschritte (oder Teile davon) zurückzugreifen. Solche „Rückschritte“ werden besonders dann nötig, wenn das zuvor Erlernte noch nicht ausreichend stabilisiert, geschweige denn automatisiert war. Jedenfalls sollte dies kein Grund zur Resignation sein! Denn ich habe immer wieder auch die Erfahrung gemacht, dass die benötigten Wiederholungsphasen im Laufe der Zeit kürzer und seltener werden.

- Für die Additionen mit bis zu 4 Positionen steht – sofern das nötig ist – ein Aufgabenschema zur Verfügung (**Arbeitsblatt C 15**).
- Die Fortschritte beim zweistelligen Addieren können anhand des **Lernprotokolls C IX** dokumentiert werden.
- Besonders interessierten Lernenden kann man anhand der neun Positionen umfassenden Stellentafel (**Arbeitsblatt C 16**) einen Einblick in die weiterführende Systematik der Zahlen vermitteln.
- Es ist ratsam, nach einer Einarbeitungs- und Übungszeit die Rechenfertigkeit der Schülerinnen und Schüler gezielt zu überprüfen und die Fehler zu

[1] Einsatz der Fingermengen beim Zerlegen

analysieren. Sehr gute Erfahrungen habe ich mit den Aufgaben von Gerster[1] gemacht, die auf den **Arbeitsblättern C 17 a und b** zu finden sind.

Der Autor unterscheidet folgende Fehlergruppen:

E Fehler beim Einsundeins: Die auf die nächste Stelle übertragene 1 wird vergessen;

N Fehler mit der Null;

L Fehler durch unterschiedliche Stellenzahlen bei den Summanden (leere Stellen);

IO Fehler durch inverse Operation (addieren statt subtrahieren);

P Fehler durch Perseveration (weil sich z. B. eine vorangegangene Zahlenkonstellation oder Strategie durchsetzt);

Ü Fehler beim Übertrag (Übertragung nicht berücksichtigt, Übertragungsziffer zu viel, falsches Operieren mit der Übertragungsziffer).

Die spezifischen Aufgaben des Tests sollten mit den Lernenden nicht besprochen werden, damit man ihn zu einem späteren Zeitpunkt wiederholen kann.

- Bei Bedarf zeigt man den Lernenden wie sie auch mehrere Summen speditiv addieren können. Dabei knüpft man mit Vorteil an die bisherige Additionsstrategie an: Unter das Ergebnis der ersten Addition fügt man die weitere Summe an und rechnet wiederum das Ergebnis aus usw.
- Selbstverständlich sollten die Schülerinnen und Schüler auch in den Gebrauch des Taschenrechners eingeführt werden.

S u b t r a k t i o n

Entgegen der allgemeinen Gepflogenheit führe ich diese Thematik nicht zusammen mit der Addition ein. Denn wie ich bereits ausführlich darlegte[1], ist die Subtraktion aus verschiedenen Gründen wesentlich schwieriger zu erlernen als die Addition.

[1] Gerster, H.-D.: Schülerfehler bei schriftlichen Rechenverfahren – Diagnose und Therapie, 1982

Und deshalb greifen lernbehinderte Schülerinnen und Schüler (aber nicht nur diese!) besonders bei dieser Operation vermehrt auf das Zählen zurück. Da aber dies wiederum bei der Subtraktion nicht so einfach ist wie es auf den ersten Blick erscheinen mag, ist diese Lösungsstrategie in der Regel sehr fehleranfällig.
Ich gehe deshalb in meinem Konzept davon aus, dass es sinnvoller ist, den Lernenden zuerst eine weitgehende Sicherheit im Umgang mit Zahlen zu ermöglichen und damit die Basis zu legen für die bei der Subtraktion verlangte grössere Beweglichkeit des rechnerischen Denkens.

7 Erweitertes Zählen

7.1 Die erste Annäherung an die Subtraktion beginnt mit dem **Rückwärtszählen**.
Die Lernenden haben das dekadische System nun bereits so gut verinnerlicht, dass sie in der Regel problemlos – wenn auch vermutlich noch nicht automatisiert – mündlich von 10 rückwärts zählen können.
Daran anknüpfend stellt sich die Frage:

*Welche Zahl kommt **vorher***
wenn ich 1 Schritt zurückgehe bzw. 1Erbse wegnehme?

Im basalen Zahlenraum bis 10 können diese Fragen *mündlich* vorgegeben werden.

Bei zweistelligen Zahlen wird in der Regel mit *schriftlich* vorliegenden Aufgaben begonnen (**Arbeitsblätter C 18 a und b**), bevor diese auch in mündlicher Form gelingen können.

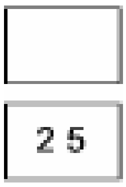


Abb. 23: **Rückwärtszählen**

Für weitere Übungen kann das Aufgabenblatt **C 8 c** benutzt werden. Dabei ist zu beachten, dass Aufgaben, die eine Entbündelung verlangen, hier noch nicht thematisiert werden sollten.

[1] vgl. Modul A, Kapitel 3.4

7.2 Im nächsten Schritt werden solche Aufgaben analog zum erweiterten Zählen in der operativen Form von ***„weg-1-Rechnungen“*** bearbeitet.

Die Frage lautet nun: *„Wie viel bleibt, wenn ich 1 wegnehme?“*

23	35	56
- 1	- 10	- 11
____	____	____

Abb. 24: **Beispiele für „weg-1-Rechnungen„ pro Stelle**[1]

Anders als bei der vorangegangenen Übung, bei denen die Rückwärtsstrategie in der Darstellung noch ersichtlich ist, suggeriert diese operative Fassung in zweifacher Hinsicht sozusagen eine *Vorwärts*strategie: Die Rechnung enthält eine erste Zahl (Minuend) *und (!)* eine zweite Zahl (Subtrahend), welche erst noch dem Minuend *folgt.* Gegen eine solche Evidenz der Wahrnehmung hat das kleine abstrakte Operationszeichen wahrlich einen schweren Stand! Es ist deshalb nicht immer „nur“ mangelnde Aufmerksamkeit, wenn Kinder bei Subtraktions-rechnungen fälschlicherweise addieren – zumal Additionsrechnungen erst noch leichter zu bewältigen sind.

Ausgedehntere Übungen dieser Art, bei der vorerst keine weitere Rechenfertigkeit verlangt wird, sind deshalb als eine relativ wichtige Etappe in diesem Lernprozess sehr zu empfehlen. Und da die Schülerinnen und Schüler den mehrstelligen Zahlenraum bereits kennen gelernt haben, ergeben sich wie in der folgenden Abbildung vielfältige Variationsmöglichkeiten.

[1]Diese Aufgaben werden in das Aufgabenschema **C 14** übertragen.

985	742	823	661	547	324
- 1	- 10	- 100	- 101	- 110	- 111

Abb. 25: **Beispiele für einfache Subtraktionen im dreistelligen Zahlenraum**[1]

Auch bei diesen Übungen sollten die Lernenden die hinter den Zahlen stehenden Mengen nicht aus den Augen verlieren. Es ist deshalb wichtig, dass sie mit geeignetem Material[2] diesen Bezug in den bereits bekannten Versionen herstellen können: Einerseits die Zahlenaufgabe auf der Mengenebene realisieren; andererseits umgekehrt konkretes Handeln in eine abstrakte Zahlenaufgabe transformieren.
Im **Lernprotokoll C X** werden die Lernschritte dieses Kapitels notiert.

Lernschritt 5 a des Computerprogramms ermöglicht unter dem Titel „Einfache Rechnungen (Minus 1 pro Stelle)“ zahlreiche Übungen dieser Art. Sie gehen aber über die vorgängig beschriebenen Aufgaben insofern hinaus, als der Minuend bei mehrstelligen Aufgaben auch eine Null enthalten kann, so dass gleichzeitig auch die Notation des Entbündelns eingeführt und eingeübt werden kann.

8 Subtrahieren innerhalb der Positionen

In diesem Kapitel geht es um die Subtraktion ***innerhalb der Positionen,*** bei denen der Minuend grösser ist als der Subtrahend und dieser grösser ist als 1.

Es ist evident, dass es bei der Subtraktion keine Erleichterung im Sinne der Kommutativität gibt. Die Subtraktionen sind deshalb im Vergleich zur Addition nicht nur *zahlreicher*, sondern vor allem auch *schwieriger*.

---

[1] Solche Aufgaben werden in das Aufgabenschema **C 16** übertragen; eine Ausweitung auf 4-stellige Zahlen ist erwünscht.
[2] Das Material muss bereits in gebündelter Form vorliegen; im vierstelligen Raum eignet sich besonders auch Geld.

Das folgende Diagramm zeigt alle Subtraktionsaufgaben im basalen Zahlenraum von 0 bis 9. Abzüglich der Aufgaben mit den Subtrahenden 0 und 1 sowie derjenigen, bei denen Subtrahend und Minuend gleich gross sind, beläuft sich ihre Anzahl auf 28 Aufgaben.

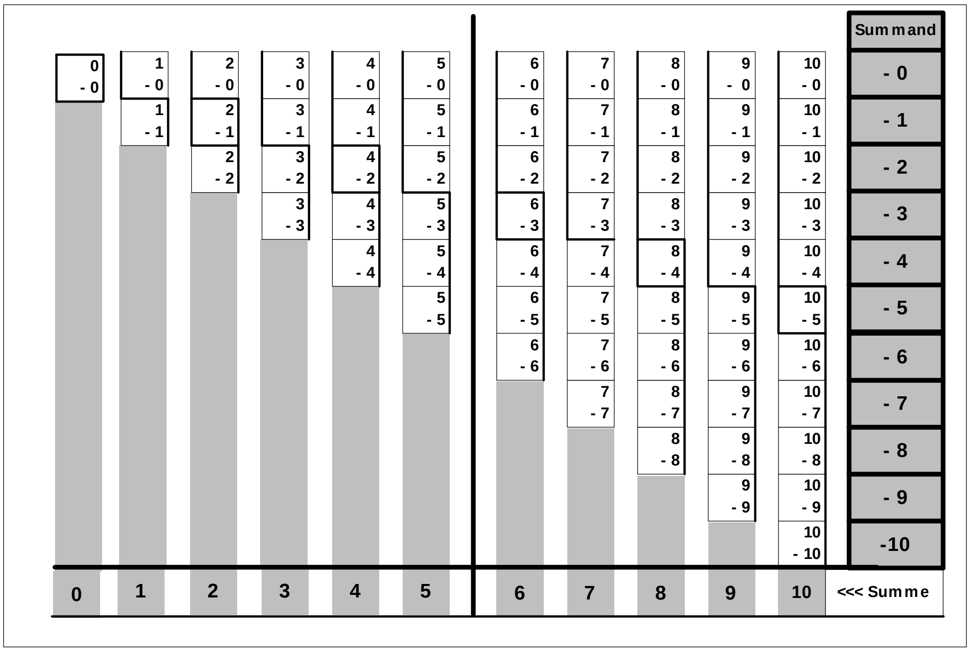


Abb. 26: **Subtraktionen innerhalb der Einer-Stelle**

8.1 Es liegt nahe, mit den ***leichten*** Aufgaben innerhalb der Einer-Stelle zu beginnen. Dies sind Aufgaben mit einer ***kleinen zu subtrahierenden Zahl***, bei denen das simultane *Wegnehmen* im Sinne der *Rückwärtsbewegung* im Allgemeinen kein grosses Problem darstellt, weil solche Mengen ganzheitlich noch gut zu überblicken sind.

Zur Einübung empfiehlt sich einmal mehr die Arbeit mit den *Fingermengen* (oder ersatzweise mit dem *Kugelstab*):

Aufgabenbeispiel:

9 von den 9 Fingern bzw. Kugeln

\- 4 werden die 4 Finger der rechten Hand miteinander weggeklappt bzw. die 4 blauen Kugeln aufs Mal weg geschoben.

Als Übungsvariante eignet sich auch hier die Arbeit mit dem *Positionsstreifen* (Arbeitsblatt C 3): Die Arbeit beginnt damit, dass der jeweilige Minuend – gemäss Beispiel also die Menge 9 – ausgeschnitten vorliegt; der Subtraktionsvorgang wird konkretisiert, indem die letzten 4 Ränge als Ganzes weg geschnitten werden.

8.2 ***Schwieriger*** sind Rechnungen, bei denen der ***Subtrahend grösser als 4*** ist. Hier ist es nicht mehr praktikabel, die Strategie der simultanen Rückwärtsbewegung beizubehalten. Denn weil hier – räumlich gesprochen – der „Rückweg“ ganzheitlich nicht mehr überblickbar ist, besteht die Gefahr, dass die Lernenden auf das Abzählen zurückgreifen.

Um diese Schwierigkeit zu beheben, mache ich die Lernenden zusätzlich mit dem sogen. *Differenzverfahren* bekannt.

Bei Aufgaben wie z. B. 9
- 7

ist es einfacher, die seit langem geläufige „Ausgangsmenge“ 7 der von oben nach unten laufenden ordinalen Zahlenreihe in einem ganzheitlichen Akt wegzunehmen bzw. wegzudenken, so dass die resultierende Differenz – die Menge 2 – in Form des achten und neunten Elements übrig bleibt. Ein analoges Vorgehen ist mit den Fingermengen, am Kugelstab oder mit dem Positionsstreifen möglich.

Anmerkungen

- Die beiden skizzierten Richtungen des Wegnehmens – ob also vom Stellenende oder vom Stellenanfang – lassen sich besonders gut einüben bei *mündlichen* Aufgaben mit den Fingern: Ausgehend von 10 Fingern können unterschiedlich umfangreiche Mengen abgezogen werden. Es hat sich gezeigt, dass *kleinere* Mengen in Form der Rückwärtsbewegung von unten nach oben weggenommen werden, *grössere* Subtrahenden hingegen von oben nach unten. Diese unterschiedlichen Vorgehensweisen lassen sich auch am Stellenbrett bzw. mit dem Positionsstreifen demonstrieren.
  Es sei jedoch betont: Solche Übungen sollten vorerst *ausschliesslich mündlich* durchgeführt werden. Denn das *schriftliche* Lösen solcher Aufgaben setzt ja voraus, dass den Lernenden das Vorgehen und die Notation beim Entbündeln bereits bekannt ist.
- Im Unterricht der Regelschule ist es allgemein üblich, die schriftliche Subtraktion in Form des *Ergänzungsverfahrens* durchzuführen. Dabei geht es im Prinzip um ein „Hinaufaddieren“ (im Beispiel „von 7 auf 9“). Der Grund für diese Strategie: Addieren ist leichter als subtrahieren!

Im Gegensatz dazu habe ich mich aus verschiedenen Gründen dazu entschlossen, den Vorgang des Subtrahierens im ursprünglichen Sinne als ***Wegnehmen bzw. Abziehen*** beizubehalten. Mit einer flexiblen Strategie des Handelns bzw. Vorstellens wie oben beschrieben, können so die besonderen Schwierigkeiten der Subtraktion trotzdem vermieden werden. So lässt es sich vermeiden, die Lernenden mit einem Ergänzungsverfahren zu verwirren, das nicht unmittelbar nachvollziehbar ist und deshalb leicht wieder vergessen wird! Die Entscheidung für das Abziehverfahren entspricht überdies der Anwendung in lebenspraktischen Situationen und auch dem Vorgehen beim Einsatz eines Taschenrechners. Ein weiteres wichtiges Argument ist nicht zuletzt auch der Umstand, dass sich dadurch zweistellige Aufgaben, bei denen ein Entbündeln nötig ist (vgl. unten), erheblich vereinfachen.

- Die **Aufgabenblätter C 19 a - c** enthalten alle im Diagramm aufgeführten Übungsaufgaben, wobei der Schwierigkeitsgrad gemischt ist.
  Darin eingestreut sind auch einige Aufgaben, die nicht gelöst werden können, weil der Subtrahend grösser ist als der Minuend – ein bewährtes Mittel zur Anregung der Aufmerksamkeit und der Denktätigkeit!
- Entgegen anfänglichen Befürchtungen hatten die Schülerinnen und Schüler im Allgemeinen erstaunlich wenig Probleme mit dem Verständnis und der flexiblen Handhabung dieser Subtraktionsmodalitäten.
- Da die Rechnungen innerhalb der Positionen in der gleichen Art gelöst werden, können auch hier die Übungen bald einmal mit *mehrstelligen Aufgaben* abwechslungsreicher und motivierender gestaltet werden.
- Im Lernprotokoll C XI werden die Lernschritte notiert.
- Die hier im Kapitel 8 thematisierten Übungen „Subtrahieren innerhalb der Position“ finden unter dem Titel „Subtraktion ohne Zerlegen“ ihre Entsprechung im **Lernschritt 5 b, Stufe 1 bis 3 des Softwareprogramms.**
  Die Übungen der folgenden Stufen 4 bis 7 gehen hingegen einen Schritt weiter: Hier können im Minuend eine oder mehrere Zahlen mit Null vorkommen, so dass also bereits ein Entbündeln vorauszusetzen ist.
  Lernende, die beim Lösen der schriftlichen Aufgaben bereits ausreichend kompetent sind, können sich an die anspruchsvolleren **mündlichen** Übungen des **Lernschritts 5 d, Stufen 1 bis 5** wagen.

9 Subtrahieren mit Entbündeln

9.1 In einer ersten Annäherung wird das **Entbündeln** bei Aufgaben mit **vollen Zehnern** aufgezeigt, zu denen die vorangegangene Zahl gesucht ist. Auch hier lautet die Frage wiederum:

"Welche Zahl kommt vorher?"

Die auf dem **Arbeitsblatt 20** zusammengefassten Aufgaben werden bei Bedarf konkret veranschaulicht:

> Auf dem zweistelligen Abakus bzw. als entsprechende Struktur auf neutraler Unterlage steht gebündeltes Material zur Verfügung (mehrere *zu Zehnern gebündelte* Erbsen oder Ein-Franken-Münzen oder Zündhölzer usw.). Die Kinder ermitteln die Zahl, indem sie die 10 Elemente des jeweils letzten Zehners auf die Einer-Stelle zurück versetzen.

Bei Bedarf können die Lernenden den ihnen bekannten Vorgang der Bündelung zuerst nochmals ausführen und sich so den Vorgang und auch die Bedeutung der Null wieder bewusster machen. Das erleichtert manchen Kindern die Einsicht in den umgekehrten Vorgang des Entbündelns.

Die Kinder können/sollen alle Aufgaben so lange handelnd lösen, bis sie den Vorgang des Entbündeln verinnerlicht haben.

Die letzte Aufgabe (Zahl vor 100) ist besonders komplex, weil hier zunächst der Hunderter und dann noch der Zehner entbündelt werden muss.

9.2 Anknüpfend an die vorangegangenen Aufgaben werden die Lernenden anhand von **Arbeitsblatt C 21 a - c** mit der **schriftlichen Darstellung** dieses Vorgangs bekannt gemacht.

Die Lehrperson dient als Modell und kommentiert ihr Handeln anhand einer konkreten Aufgabe (z. B. *30 weg 1*) etwa wie folgt:

> *„Die Einer-Stelle ist leer, hier kann also nichts weggenommen werden; wir müssen zuerst einen Zehner auflösen und diese Menge auf das Einer-Brett verteilen; damit wir nicht vergessen, dass es jetzt einen Zehner weniger hat, schreiben wir hier unten in der Rechnung eine kleine 1“ Jetzt heisst die Aufgabe in der Einer-Stelle also: 10 weg 1, und in der Zehnerstelle 3 Zehner weg 1 Zehner“.*

Besonderer Erklärungsbedarf besteht auch hier wiederum bei der letzten Aufgabe (100 weg 1), weil hier beim Entbündeln zwei Stellen zu überschreiten sind.

Zahlreiche Übungsvarianten dieser Aufgabenart – d.h. Aufgaben mit vollen Zehnern im Minuend und einer einstelligen Zahl im Subtrahend – stehen auf den **Arbeitsblättern C 22 a - d** zur Verfügung.

Weil hier alle Subtraktionen in der Einer-Stelle von der Basiszahl 10 ausgehen, eignen sich dieses Aufgaben auch besonders dazu, das Abziehverfahren flexibel – also entweder vom Stellenanfang oder vom Stellenende her – anzuwenden und einzuüben.

Anmerkung: Die hier in den Kapiteln 9.1 und 9.2 thematisierten Übungen können unter Umständen übersprungen werden, wenn die Lernenden das Entbündeln aufgrund entsprechender Softwareübungen vorgängig bereits entsprechend ausgiebig eingeübt haben. Ein gelegentlicher Rückgriff auf die Handlungsebene ist aber zu Demonstrationszwecken im Prinzip nie ganz überflüssig.

9.3 Das letzte Kapitel beschäftigt sich schliesslich mit den Aufgaben, die das **Zerlegen des Subtrahenden** verlangen, weil in der Einerstelle der Minuend kleiner ist als der Subtrahend, aber grösser als Null.

In diesem letzten Kapitel ergeben sich im Prinzip keine neuen Lernschritte, da alle dafür erforderlichen Voraussetzungen bereits vorgängig eingeübt wurden.

Das *Zerlegen* des Subtrahenden bleibt aber wohl auch bei diesen Aufgaben eine besondere Herausforderung. Im Vergleich mit den analogen Additionsaufgaben gibt es allerdings eine kleine Erleichterung: Der erste Teil der zu zerlegenden Zahl ist ja bereits vorgegeben, muss also nicht – wie bei den Additionsaufgaben mit Zehnerübergang – durch den Ergänzungsvorgang ermittelt werden.

Die Lernenden beginnen mit den Subtraktionen im Zahlenraum bis 19 die im Diagramm der Abb. 27 dargestellt und als Aufgaben auf den **Arbeitsblättern C 23 a & b** zur Verfügung stehen.

11 - 2	11 - 3	11 - 4	11 - 5	11 - 6	11 - 7	11 - 8	11 - 9
	12 - 3	12 - 4	12 - 5	12 - 6	12 - 7	12 - 8	12 - 9
		13 - 4	13 - 5	13 - 6	13 - 7	13 - 8	13 - 9
			14 - 5	14 - 6	14 - 7	14 - 8	14 - 9
				15 - 6	15 - 7	15 - 8	15 - 9
					16 - 7	16 - 8	16 - 9
						17 - 8	17 - 9
							18 - 9
- 2	- 3	- 4	- 5	- 6	- 7	- 8	- 9

Abb. 27: **Minusaufgaben mit Zerlegen des Subtrahenden**

Dabei gewöhnen sich die Lernenden an folgende Sprech- bzw. Denkweise, dargestellt am Beispiel der Aufgabe *„14 weg 6“*:

Auf der Einer-Stelle kann ich 4 wegnehmen, dann ist diese Stelle leer;

Es bleiben noch 2 zum Wegnehmen. Deswegen entbündle ich den Zehner und schreibe unten eine kleine 1, die ich dann später dort wegrechnen muss;

ich rechne in der Einerstelle: „10 weg 2 gibt 8“ und in der Zehnerstelle „1 weg 1 gibt 0“.

Die Lernenden werden darauf hingewiesen, dass am Anfang die Null entfällt.

Übungsmöglichkeiten finden sich in den **Die Lernschritt 5 c, Stufen 1 bis 3 des Computerprogramms**

9.4 Es folgt eine **ausgedehnte Übungsphase** mit Subtraktionen im mehrstelligen Zahlenraum – siehe dazu **Die Lernschritt 5 c, Stufen 4 bis 7 des Computerprogramms**

Beim Ausweiten auf drei-, vier- oder gar weitere mehrstellige Aufgaben gibt es beim Entbündeln über mehrere Stellen hinweg wiederum einige Knacknüsse zu bewältigen.

Anmerkungen

- Die **Lernprotokolle C XII & XIII** halten die Stufen bei der Erarbeitung der Subtraktionen mit Entbündeln fest.

Lernende, die beim Lösen der schriftlichen Aufgaben bereits ausreichend kompetent sind, können sich bei Bedarf an die anspruchsvolleren mündlichen Übungen des **Lernschritts 5 d, Stufen 5 bis 9** wagen.

- Nach einer ausgedehnten und variationsreichen Übungsphase empfiehlt es sich, den Lernenden die von Gerster[1] zusammengestellten Subtraktionsaufgaben der **Arbeitsblätter C 24 a und b, evtl. auch c und d** als Test zur Überprüfung ihrer Rechenfertigkeit vorzulegen.

  Die vom Autor angeführten Fehlergruppen ermöglichen der Lehrperson eine gezielte Fehleranalyse:

  E Fehler beim Einswegeins (die wegen des Entbündelns notierte 1 wird vergessen);

  Ü Fehler beim Übertrag;

  R Fehler durch falsche Rechenrichtung (vom grösseren Subtrahend wird der kleinere Minuend abgezogen);

  N Fehler mit der Null;

  L Fehler durch unterschiedliche Stellenzahlen (leere Stellen);

  IO Fehler durch inverse Operation (addieren statt subtrahieren);

  P Fehler durch Perseveration (weil sich z. B. eine vorangegangene Zahlenkonstellation oder Strategie durchsetzt);

* * *

Weitere Übungsmöglichkeiten bieten die **Lernschritte 6 des Computerprogramms.** Es handelt sich um eine Wiederholung aller bisher eingeübten Rechenoperationen. In jedem der Lernschritte **6a bis d** sind jedoch die **Additions- und Subtraktionsaufgaben gemischt**, was von den Lernenden sowohl erhöhte Aufmerksamkeit wie auch mehr Flexibilität verlangt.

E n d e

* * * *

[1] Gerster, H.-D.:Schülerfehler bei schriftlichen Rechenverfahren – Diagnose und Therapie. Freiburg i.Br.,1982